Konzentrationsungleichungen, Teil II

Übungsblatt 18

TU Dortmund, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ivan Veselić

Übung 35 (4 Punkte). *Sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.*

a) Seien P und Q Gaußmaße mit Erwartungswerten $\mu, \tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ und Varianzen $\sigma, \tilde{\sigma} > 0$. Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Divergenz $D(P\|Q)$.

b) Sei P die Gleichverteilung auf dem Intervall $[-1/2, 1/2]$ und Q das Standardgaußmaß auf $\mathbb{R}$ (Erwartungswert 0, Varianz 1). Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Divergenz $D(P\|Q)$.

c) Sei nun P die Gleichveteilung auf dem Intervall $[a, a]$, $a > 0$ und Q das Standardgaußmaß auf $\mathbb{R}$. Finden Sie das a, welches $D(P\|Q)$ minimiert.

Übung 36 (4 Punkte). *Erinnerung: Für eine reellwertige Zufallsvariable Z war die logarithmische Momentenerzeugende Funktion definiert als*

$$\psi_Z(\lambda) := \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Z}], \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

und die Fenchel-Legendre-Duale als

$$\psi^*(t) := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left[\lambda t - \psi_{Z-\mathbb{E}[Z]}(\lambda).\right].$$

Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$ gilt:

$$\psi^*(t) = \inf\left\{D(Q\|P) \colon \mathbb{E}_Q[Z] - \mathbb{E}_P[Z] \geq t\right\}.$$

Abgabe und Besprechung am 28.11.2017 in der Übung.