Konzentrationsungleichungen, Teil II

Übungsblatt 20

TU Dortmund, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ivan Veselić

Übung 39. *Ziel dieser Aufgabe ist, zu zeigen, dass für Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf endlichen Mengen die Han-Ungleichung äquivalent zur Subadditivität der Entropie ist. Zur Erinnerung an die Subadditivität der Entropie: Für* $Y = f(X_1, \dots, X_N)$*, wobei* $X_1, \dots, X_N$ *unabhängige Zufallsvariablen sind, gilt*

$$\operatorname{Ent}(Y) \leq \mathbb{E} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ent}^{(i)}(Y). \tag{1}$$

Dies war im Fall, dass die Zufallsvariablen endliche Wertebereiche haben, mit Hilfe der Han-Ungleichung bewiesen worden.

Sei nun $\mathcal{X}$ *endlich und seien* $X_1, \dots, X_n$ *unabhängige Zufallsvariablen auf* $\mathcal{X}$*. Verwenden Sie* (1)*, um daraus die Han-Ungleichung*

$$H(X) \leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} H\left(X^{(i)}\right)$$

herzuleiten. Dabei ist $H(X) := -\sum_x p(x) \log p(x)$ *die Shannon-Entropie von* X*, wobei* $p(x) := \mathbb{P}(X = x)$*.*

Übung 40. *a) Seien* $a, b \geq 0$ *und sei* $\lambda \in (0,1)$*. Zeigen Sie*

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

b) Seien $a_i \geq 0$ *und* $b_i > 0$ *für* $i \in \{1, \dots, n\}$*. Zeigen Sie*

$$\sum_i a_i \log\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \geq \sum_i a_i \log\left(\frac{\sum_i a_i}{\sum_i b_i}\right).$$

Abgabe und Besprechung am 12.12.2017 in der Übung.