Konzentrationsungleichungen, Teil II

Übungsblatt 21

TU Dortmund, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ivan Veselić,
Matthias Täufer

Übung 41 (4 Punkte). *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge und $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von $\mathcal{X}$. Eine Menge $A \in \mathcal{G}$ heißt* Atom *in $\mathcal{G}$, wenn es außer A und $\emptyset$ keine weiteren Teilmengen von A in $\mathcal{G}$ gibt. Bezeichne* $\operatorname{atom}(\mathcal{G})$ *die Menge der Atome von $\mathcal{G}$. Wenn P und Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{X}$ sind und $\mathcal{G}$ höchstens abzählbar viele Atome hat, sei*

$$D(P\|Q|\mathcal{G}) := \sum_{A \in \operatorname{atom}(\mathcal{G})} P(A) \log \frac{P(A)}{Q(A)}.$$

Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ eine Unter-σ-Algebra. Zeigen Sie

$$D(P\|Q|\mathcal{H}) \leq D(P\|Q|\mathcal{G}).$$

Übung 42 (4 Punkte; Fortsetzung von Aufgabe 41). *Zeigen Sie:*

$$D(P\|Q) = \sup\{D(P\|Q|\mathcal{G}) : \ \mathcal{G} \text{ hat endlich viele Atome}\}.$$

Abgabe und Besprechung am 09.01.2018 in der Übung.

Wir wünschen Frohe Weihnachten und ein gesundes neues Jahr!