Konzentrationsungleichungen, Teil II

Übungsblatt 22

TU Dortmund, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ivan Veselić,
Matthias Täufer

Übung 43 (4 Punkte). *Erinnerung (Logarithmische Sobolevungleichung auf dem Hyperwürfel, Theorem 5.1): Sei $f\colon \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ und X uniform verteilt auf auf $\{-1,1\}^n$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq 2\mathcal{E}(f),$$

wobei

$$\mathcal{E}(f) := \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\Big(f(X) - f(\tilde{X}^(i))\Big)^2\right]$$

und $\tilde{X}^{(i)}$ die Zufallsvariable X mit unabhängig neu ausgewürfelter i-ter Koordinate bezeichnet. Folgern Sie daraus

$$\mathrm{Var}(f(X)) \leq \mathcal{E}(f).$$

Tipp: Betrachten Sie $1 + \epsilon f(X)$ und nutzen Sie $\log(x) = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$.

Übung 44. *Vervollständigen Sie den Beweis von Theorem 5.8 aus der Vorlesung. Zur Erinnerung: Wir hatten einen zentrierten Gaußprozess $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$, wobei $\mathcal{T}$ ein total beschränkter metrischer Raum war (d.h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ und $\tau_1, \dots, \tau_N \in \mathcal{T}$ so dass $\mathcal{T} = \cup_{i=1}^{N} B_\epsilon(\tau_i)$). Wir hatten zudem angenommen, dass ein $\Omega_0 \in \Omega$ mit Maß 1 existiert, so dass für alle $\omega \in \Omega_0$ die Abbildung $\mathcal{T} \ni t \mapsto X_t(\omega)$ stetig ist. Sei*

$$Z := \sup_{\tau\in\mathcal{T}} Xt$$

und

$$\sigma^2 := \sup_{t\in\mathcal{T}} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty.$$

Dann besagt Satz 5.8, dass

$$\mathrm{Var}(Z) \leq \sigma^2 \quad \textit{und} \quad \max\{\mathbb{P}(Z - \mathbb{E}Z \geq u), \mathbb{P}(Z - \mathbb{E}Z \leq u)\} \leq \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right).$$

Den Beweis hatten wir zunächst nur im Spezialfall, dass $\mathcal{T}$ endlich ist, geführt. Vervollständigen Sie nun den Beweis, indem Sie den allgemeinen Fall folgern.

Abgabe und Besprechung am 23.01.2018 in der Übung.