

Konzentrationsungleichungen, Teil II

Übungsblatt 23

TU Dortmund, Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ivan Veselić,
Matthias Täufer

Ziel der folgenden zwei Aufgaben, ist es, in der Vorlesung ausgelassenene Schritte im Beweis von Theorem 5.9 zu füllen. Sei $T \subset S_{D-1}$ endlich, wobei S_{D-1} die Einheitskugel in \mathbb{R}^D bezeichne (Bemerkung: wir hatten in der Vorlesung die zu beweisenden Aussagen zunächst von unendlichen auf endliche T reduziert).

Übung 45. *Definiere*

$$f: \mathbb{R}^{D \times d} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sup_{\alpha \in T} \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^D \alpha_j x_{ij} \right)^2$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ ist 1-lipschitzstetig. Was ändert sich, wenn sup durch inf ersetzt wird?

Übung 46. *Setzen Sie*

$$Z' := d \cdot \inf_{\alpha \in T} \|W(\alpha)\|^2,$$

wobei die \mathbb{R}^d -wertige Zufallsvariable $W(\alpha)$ definiert ist als

$$W(\alpha) := \left(\frac{1}{\sqrt{d}} W_i(\alpha) \right)_{i=1}^d, \quad W_i(\alpha) = \sum_{j=1}^D \alpha_j X_{ij}$$

für unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen X_{ij} . Zeigen Sie für alle $t > 1/2$:

$$P \left(Z' - \mathbb{E}Z' \leq -2\sqrt{2t\mathbb{E}Z'} \right) \leq e^{-t}.$$

Tipp: Gaußsche Konzentrationsungleichung und Gaußsche Poincaréungleichung.

Abgabe und Besprechung am 30.01.2018 in der Übung.