technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Dr. A. Seelmann

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Fourieranalysis

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 26) (Lyapunovsche Ungleichung) (2+2=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < q \leq \infty$ weder $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$ noch $L^p(\mathbb{R}^n) \supseteq L^q(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Tipp: Es kann hilfreich sein, zuerst den Fall $n = 1$ zu betrachten.

(b) (*Lyapunovsche Ungleichung*) Seien $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ und $0 \leq \theta \leq 1$. Wir definieren $p \in [1, \infty]$ durch $\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ (mit der üblichen Konvention $\frac{1}{\infty} := 0$). Zeigen Sie, dass dann $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt mit

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_0}}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{L^{p_1}}^{\theta}$$

für alle $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$.

Tipp: Höldersche Ungleichung.

Bemerkung: Für $p < \infty$ liegt $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ sogar dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, da $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ natürlich insbesondere alle integrierbaren Treppenfunktionen enthält. Die Lyapunovsche Ungleichung ist nun die Grundlage für eine entsprechende Version des *Interpolationssatzes von Riesz-Thorin* über $\mathbb{R}^n$, vgl. den entsprechenden Abschnitt der Vorlesung im letzten Semester.

Aufgabe 27) (Fouriertransformationen) (1+1+2=4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Fouriertransformation $\hat{f}$ für die folgenden Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R})$:

(i) $f = \chi_{[-1,1]}$ (ii) $f(x) = e^{-|x|}$ (iii) $f(x) = \max\{0, 2 - |x|\}$