technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Dr. A. Seelmann

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Fourieranalysis

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 28) (Eine Fouriertransformierte) (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte von f durch $\hat{f} = (\sqrt{2\pi})^n f$ gegeben ist.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall $n = 1$. Leiten Sie hier eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\hat{f}$ her, wobei der Wert $\hat{f}(0)$ ein bekanntes Integral ist.

Aufgabe 29) (Eine Fouriertransformierte durch Faltung) (2 Punkte)

Wir betrachten noch einmal die Hutfunktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \max\{0, 2 - |x|\}\,.$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{h}$ mit Hilfe von Lemma 10.9 und Beispiel 10.3 (b).

Aufgabe 30) (Glättung durch Faltung) (1+2+2=5 Punkte)

Es sei $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\psi(t) := \begin{cases} e^{-1/t}\,, & \text{falls } t > 0 \\ 0\,, & \text{falls } t \le 0 \end{cases}.$$

Ferner definieren wir $\eta, \eta_\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, durch

$$\eta(x) := C \cdot \psi(1 - |x|^2)\,, \quad \eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,,$$

wobei $C > 0$ so gewählt ist, dass $\|\eta\|_{L^1} = 1$. Man zeigt leicht, dass $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta_\varepsilon(x) = 0$ für $|x| \ge \varepsilon$.

Sei nun $1 \le p < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ gilt $\eta_\varepsilon * f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\eta_\varepsilon * f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$.

(b) Für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ gilt $\eta_\varepsilon * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, sowie

$$\|\eta_\varepsilon * f - f\|_{L^\infty} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\,.$$

(c) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p})$, und für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|\eta_\varepsilon * f - f\|_{L^p} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\,.$$

Hinweis: $C_c(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p})$.

bitte wenden

Aufgabe 31) (Approximation mit glattem Abschneider) (2+3=5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es eine reellwertige Funktion $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gibt mit

$$\phi(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0\,, & \text{für } |x| \geq 2 \end{cases}\,,$$

sowie $0 \leq \phi(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Man nennt ϕ eine *glatte Abschneidefunktion.*

Hinweis: Man betrachte $\eta_\varepsilon * \chi_{B_{3/2}(0)}$ (vgl. Aufgabe 30).

Für $l \in \mathbb{N}$ definieren wir $\phi_l \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch $\phi_l(x) := \phi(x/l)$ mit ϕ aus (a). Zeigen Sie:

(b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ mit $D^\alpha f \in L^1\mathbb{R}^n$ für alle $|\alpha| \leq k$ gilt $\phi_l \cdot f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und $\|D^\alpha(\phi_l \cdot f) - D^\alpha f\|_{L^1} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$ für $|\alpha| \leq k$.

Tipp: Wie verhält sich $\phi_l \cdot D^\alpha f$ für $l \to \infty$?