Dr. A. Seelmann

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Fourieranalysis

im Wintersemester 2017/18

Bemerkung: Aufgabe 35 benötigt mit der Inversionsformel den Stoff der Vorlesung vom 8. November 2017. Für Aufgabe 34) ist dieser Stoff ebenfalls hilfreich, jedoch nicht zwingend erforderlich.

Aufgabe 32) (Die Fouriertransformierte von $e^{-|x|}$) (2+2=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie für $x > 0$:

$$e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}} e^{-x^2/(2t)} \,\mathrm{d}t\,.$$

Hinweis: Multiplikation mit e^x und direktes Nachrechnen mit Transformationsformel.

(b) Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und Aufgabe 28), dass die Fouriertransformierte von f durch

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^n \cdot \Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big) \cdot \Big(\frac{1}{\pi \cdot (1+|\xi|^2)}\Big)^{\frac{n+1}{2}}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,,$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet $\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$ die Gammafunktion.

Aufgabe 33) (Folgen von Maßen) (1+2=3 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Die Folge $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ konvergiert schwach* gegen 0, d.h. für alle $f \in C_0(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\delta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Konvergiert $(\widehat{\delta_k})_k$ punktweise?

(b) Die Folge $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ mit $\mu_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \delta_j$ konvergiert schwach* gegen 0. Ferner konvergiert $(\widehat{\mu_k})_k$ punktweise, aber nicht überall gegen 0.

Tipp: Geometrische Summenformel.

Aufgabe 34) (Parsevalsche Gleichung) (4 Punkte)

Sei $H \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch $H(x) := \prod_{k=1}^n \max\{0, 1-|x_k|\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ (vgl. Beispiel 10.13 der Vorlesung). Zeigen Sie:
Für $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\overline{\mu} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} H\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big) \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\mu}(\xi)} \,\mathrm{d}\xi\,.$$

Gilt sogar $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\overline{\mu} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\mu}(\xi)} \,\mathrm{d}\xi\,.$$

bitte wenden

Aufgabe 35) (Das Bild der Fouriertransformation) (1+2+2=5 Punkte)

Wir betrachten in $C_0(\mathbb{R}^n)$ den Unterraum

$$A(\mathbb{R}^n) := \{\hat{f} \mid f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}\,,$$

das Bild der Fouriertransformation $\hat{\cdot}: L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, und versehen diesen Unterraum mit der Norm

$$\|\hat{f}\|_{A(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L^1}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $\varphi, \psi \in A(\mathbb{R}^n)$ gilt $\varphi \cdot \psi \in A(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi \cdot \psi\|_{A(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{A(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\psi\|_{A(\mathbb{R}^n)}$.

(b) $A(\mathbb{R}^n)$ liegt als Menge dicht in $(C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C_0(\mathbb{R}^n)})$.
Hinweis: Geeignete Approximation und Inversionsformel.

(c) Es gibt eine Folge (φ_k) in $A(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi_k\|_{C_0(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ und $\|\varphi_k\|_{A(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.
Tipp: Für $n = 1$ beachte man, dass $\widehat{\chi_{[-1,1]}} \notin L^1(\mathbb{R})$.
Bemerkung: Mit Hilfe des Satzes von der offenen Abbildung aus der Funktionalanalysis liefert (c), dass $A(\mathbb{R}^n)$ ein *echter* Unterraum von $C_0(\mathbb{R}^n)$ ist.