Dr. A. Seelmann

4. Übungsblatt zur Vorlesung

Fourieranalysis

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 36) (Fourierinversion) (1+2+1=4 Punkte)

In dieser Aufgabe diskutieren wir einen alternativen Beweis der Inversionsformel. Sei dazu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir betrachten

$$g_\varepsilon := \widehat{\psi_\varepsilon \cdot \hat{f}} \quad \text{mit} \quad \psi_\varepsilon(x) := e^{-\frac{\varepsilon^2 |x|^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0.$$

(a) Zeigen Sie: $g_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \hat{\hat{f}}$ punktweise.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung des Gaußkerns, dass $g_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} (2\pi)^n f(-\cdot)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(c) Folgern Sie die Inversionsformel:

$$f = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\hat{f}}(-\cdot) \quad \text{fast überall.}$$

Aufgabe 37) (Periodisierungen) (2+2+2=6 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Poissonschen Summenformel, dass

$$\coth(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + k^2 \pi^2} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tipp: Man betrachte $x \mapsto e^{-|x|}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Poissonschen Summenformel, dass die Periodisierung des Fejérkerns $F_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ für $\lambda \in \mathbb{N}$ dem periodischen Fejérkern entspricht, genauer:

$$\mathrm{Pe}(F_\lambda)(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{\sin^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{N}.$$

Folgern Sie daraus, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \tag{$*$}$$

(c) Zeigen Sie, dass die Periodisierung des Poissonkerns $P_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$, dem periodischen Poissonkern entspricht, genauer:

$$(\mathrm{Pe}\, P_\lambda)(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x) + r^2} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

mit $r = e^{-1/\lambda}$. Zeigen Sie damit erneut die Identität $(*)$.

bitte wenden

Aufgabe 38) (Das Lemma von Riemann-Lebesgue) (3 Punkte)

Folgern Sie das Lemma von Riemann-Lebesgue (Satz 10.8) mit Hilfe von Periodisierung und dem entsprechenden Resultat für Fourierkoeffizienten.

Aufgabe 39) (Fourier-Stieltjes-Transformierte) (3 Punkte)

Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{\mu} = f$.

(ii) Es gibt ein $C > 0$ mit

$$\left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \overline{f(\xi)} \, \mathrm{d}\xi \right| \leq C \cdot \|\varphi\|_{C_0(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{\varphi} \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

Hinweis: Rieszscher Darstellungssatz.