Dr. A. Seelmann

5. Übungsblatt zur Vorlesung

# Fourieranalysis

im Wintersemester 2017/18

**Anmerkung:** Die Aufgaben 42 und 43 verwenden die Fouriertransformation auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p \le 2$, die erst in der Vorlesung am 6. Dezember behandelt wird. Die Beweisstrategie für $1 < p < 2$ ist jedoch im Wesentlichen dieselbe wie für den Fall $p = 2$, der bereits mit den behandelten Stoff bearbeitet werden kann.

## Aufgabe 40) (Der Satz von Plancherel) (3 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Plancherel die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\sin(\xi)}{\xi}\Big)^k \,\mathrm{d}\xi$$

für $k = 2, 3, 4$.

## Aufgabe 41) (Atome von Maßen) (1+3=4 Punkte)

Sei $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

(a) Für $\lambda > 0$ betrachten wir die Funktion $\varphi_\lambda \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi_\lambda(t) := \frac{1}{(2\lambda)^n} \int_{[-\lambda,\lambda]^n} e^{\mathrm{i}\xi(x-t)} \,\mathrm{d}\xi\,, \quad t \in \mathbb{R}^n\,.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi_\lambda$ beschränkt ist und außerhalb jeder offenen Umgebung von $x$ für $\lambda \to \infty$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$\mu(\{x\}) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{(2\lambda)^n} \int_{[-\lambda,\lambda]^n} \hat{\mu}(\xi) e^{\mathrm{i}\xi\cdot x} \,\mathrm{d}\xi\,.$$

*Tipp:* Man betrachte $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\lambda \,\mathrm{d}\nu$ mit $\nu := \mu - \mu(\{x\})\delta_x$.

## Aufgabe 42) (Die Fouriertransformation in $L^p$ mit $1 \le p \le 2$) (4 Punkte)

Seien $1 \le p \le 2$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Fouriertransformation $\mathcal{F}_p$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$:

(i) $\mathcal{F}_p(\overline{f}) = \overline{(\mathcal{F}_p f)(-\cdot)}$ und $\mathcal{F}_p(f(-\cdot)) = (\mathcal{F}_p f)(-\cdot)$.

(ii) $\mathcal{F}_p(f(\cdot - h)) = e^{-\mathrm{i}h\cdot} \cdot (\mathcal{F}_p f)$ und $\mathcal{F}_p(f \cdot e^{-\mathrm{i}h\cdot}) = (\mathcal{F}_p f)(\cdot + h)$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $\mathcal{F}_p(f \circ T) = |\det T|^{-1} \cdot (\mathcal{F}_p f) \circ T^{-\mathrm{t}}$ für alle $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv; hierbei bezeichnet $T^{-t}$ wie üblich die Inverse zur transponierten Matrix $T^{\mathrm{t}}$ von $T$.

(iv) $\mathcal{F}_p(g * f) = \widehat{g} \cdot (\mathcal{F}_p f)$ für alle $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

*bitte wenden*

**Aufgabe 43) (Spezielle Anfangswertprobleme)** (5 Punkte)

Seien $1 \le p \le 2$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

(a) Für $\lambda > 0$ gilt

$$P_\lambda * f = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|/\lambda} (\mathcal{F}_p f)(\xi) e^{\mathrm{i}\xi \cdot} \, \mathrm{d}\xi$$

und

$$G_\lambda * f = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2/(2\lambda^2)} (\mathcal{F}_p f)(\xi) e^{\mathrm{i}\xi \cdot} \, \mathrm{d}\xi \, ,$$

wobei $P_\lambda$ den Poissonkern und $G_\lambda$ den Gaußkern bezeichnet.

(b) Die Funktion $v \colon \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{C}$ mit

$$v(x, x_{n+1}) := (P_{1/x_{n+1}} * f)(x)$$

erfüllt

$$\Delta v = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

und $v(\cdot, x_{n+1}) \xrightarrow[x_{n+1} \to 0]{} f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$; hierbei bezeichnet $\Delta$ den Laplaceoperator in Dimension $n + 1$.

(c) Die Funktion $w \colon \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{C}$ mit

$$w(x, t) := (G_{1/\sqrt{2t}} * f)(x)$$

erfüllt

$$w_t = \Delta w \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

und $w(\cdot, t) \xrightarrow[t \to 0]{} f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$; hierbei bezeichnet $\Delta$ den Laplaceoperator in Dimension $n$ (bzgl. $x$).