Dr. A. Seelmann

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Fourieranalysis

im Wintersemester 2017/18

Aufgabe 44) (Differentialgleichungen) (4 Punkte)

Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Finden Sie eine Lösung $u \in C^4(\mathbb{R})$ der Differentialgleichung

$$u^{(4)} - 5u'' + 4u = f\,,$$

wobei hier $u^{(4)}$ wie üblich die vierte Ableitung von u bezeichnet.

Hinweis: Residuenkalkül.

Aufgabe 45) (Konvergenz im Schwartzraum) (4 Punkte)

Seien $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $v = (1, 0, \dots) \in \mathbb{R}^n$ und $h > 0$. Wir betrachten die Funktion $\varphi_h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\varphi_h(x) := \frac{\varphi(x + hv) - \varphi(x)}{h}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi_h \xrightarrow[h\to 0]{} D_1\varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, wobei D_1 die partielle Ableitung nach dem ersten Argument bezeichnet.

Hinweis: Man zeige $\widehat{\psi_h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für $\psi_h = \varphi_h - D_1\varphi$.

Aufgabe 46) (Faltung mit temperierten Distributionen) (4 Punkte)

Seien $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die Funktion $T * \varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ durch

$$(T * \varphi)(x) := T\big(\varphi(x - \cdot)\big)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Zeigen Sie:

(a) $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi) \quad \text{für alle} \quad \alpha \in (\mathbb{N}_0)^n\,.$$

Hinweis: Aufgabe 45).

(b) Erfüllt T die (distributionelle) Differentialgleichung

$$PT = \delta_0 \quad \text{mit} \quad P = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha D^\alpha\,, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}\,,$$

so ist $u := T * \varphi$ eine (klassische) Lösung von

$$Pu = \varphi\,.$$

Bemerkung: Man nennt T in diesem Fall eine *Fundamentallösung* des Differentialoperators P.

bitte wenden

Aufgabe 47) (Fundamentallösung des Laplaceoperators in $\mathbb{R}^3$) (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^2} & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine radialsymmetrische Funktion $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ gibt, mit $\widehat{T_f} = T_g$ (im Sinne von Beispiel 14.10 (c)).

Tipp: Man schreibe $f = f \cdot \chi_{B_1(0)} + f \cdot \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)}$ und beachte außerdem Lemma 10.4 (e).

(b) Zeigen Sie, dass für die Funktion g aus (a) für alle $\lambda > 0$ die Identität

$$g(\lambda \cdot) = \frac{1}{\lambda} g \quad \text{fast überall}$$

gilt, und folgern Sie, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$g(x) = \frac{c}{|x|} \quad \text{für Lebesgue-fast alle } \ x \neq 0\,.$$

Tipp: Noch einmal Lemma 10.4 (e).

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion g aus (a) der Gleichung

$$\Delta g = -(2\pi)^3 \delta_0$$

im Sinne der temperierten Distributionen genügt.

Frohe Weihnachten und ein glückliches neues Jahr

Abgabe bis Mittwoch, den 17. Januar 2018, um 14 Uhr.