Dr. A. Seelmann

7. Übungsblatt zur Vorlesung

Fourieranalysis

im Wintersemester 2017/18

Anmerkung: Die Aufgaben 48 und 50 sind Präsenzaufgaben und werden in der letzten Übung vor Ort bearbeitet. Sie sind daher nicht zur Abgabe vorgesehen.

Aufgabe 48) (Eine schwach*-dichte Teilmenge in L^∞)

Sei $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(h_k)_k \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gibt mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung: Insbesondere liegt also der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n) = (L^1(\mathbb{R}^n))'$ dicht bezüglich der schwach*-Topologie.

Aufgabe 49) (Fastperiodische Funktionen) (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fastperiodisch. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $AP(\mathbb{R})$ in $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^\infty})$ abgeschlossen ist.

Tipp: Typische $\varepsilon/3$-Beweise.

Aufgabe 50) (Eine Charakterisierung für $W(f)$)

Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass $W(f)$ der L^∞-Abschluss der Menge

$$\{\varphi * f \mid \varphi \in L^1(\mathbb{R}),\ \|\varphi\|_{L^1} \le 1\}$$

ist.

Aufgabe 51) (Zum Normspektrum) (4 Punkte)

Sei $f \in AP(\mathbb{R})$, und sei $K \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} K(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$.
Zeigen Sie: Gilt $\lim_{k\to\infty} \|\eta_k K(\eta_k\cdot) * f\|_{L^\infty} = 0$ für eine Folge $(\eta_k)_k \subseteq (0,\infty)$ mit $\eta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, so gilt $0 \notin \sigma(f)$.
Hinweis: Man zeige $\lim_{k\to\infty} \|\eta_k K(\eta_k\cdot) * g\|_{L^\infty} = 0$ für alle $g \in W(f)$.