KURZZUSAMMENFASSUNG ZU KOMPLEXEN MASSEN

Diese Notiz stellt eine Kurzzusammenfassung zu komplexen Maßen auf $\mathbb{T}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$ und der Integration bezüglich dieser Maße dar. Es wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf gängige Literatur wie Rudin: *Real and Complex Analysis*, Chapter 6 oder auch Werner: *Funktionalanalysis*, Beispiel I.1 (j), Theorem II.2.5 und Anhang A.4 verwiesen.

Im Folgenden sei stets $X = \mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Metrik oder $X = \mathbb{T}^n$ versehen mit der aus $d_{\mathbb{T}}$ resultierenden Produktmetrik. Ferner betrachten wir auf X die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B}(X)$, d.h. die aus den in X offenen Mengen erzeugte σ-Algebra über X.

Eine Abbildung $\mu\colon \mathfrak{B}(X) \to \mathbb{C}$ heißt *komplexes Maß*, wenn sie σ-additiv ist, d.h. wenn für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \dots \in \mathfrak{B}(X)$ die Identität

$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j) \tag{1}$$

gilt. Man beachte, dass hierbei die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite von (1) wegen der Komplexwertigkeit von μ Teil der Definition ist. Ferner ist die linke Seite von (1) (und somit auch die rechte) invariant unter Umordnungen, weshalb die Reihe automatisch absolut konvergent ist. Wegen $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ folgt aus (1) außerdem $\mu(\varnothing) = 0$.

Die Menge der komplexen Maße auf X bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(X)$. Diese Menge bildet offenbar auf natürliche Weise einen Vektorraum. Ferner liegen mit $\mu \in \mathcal{M}(X)$ auch $\overline{\mu}$, $\operatorname{Re}\mu$, $\operatorname{Im}\mu$ in $\mathcal{M}(X)$, wobei $\overline{\mu}(B) = \overline{\mu(B)}$, $(\operatorname{Re}\mu)(B) = \operatorname{Re}\mu(B)$ und $(\operatorname{Im}\mu)(B) = \operatorname{Im}\mu(B)$ für $B \in \mathfrak{B}(X)$.

Für $\mu \in \mathcal{M}(X)$ definiert

$$|\mu|(B) := \sup\Big\{ \sum_{j=1}^{n} |\mu(B_j)| \;\Big|\; n \in \mathbb{N}\,,\ B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j\,,\ B_j \in \mathfrak{B}(X) \text{ paarweise disjunkt}\Big\}$$

ein endliches positives Maß auf X mit $|\mu(B)| \le |\mu|(B)$ für alle $B \in \mathfrak{B}(X)$, das sogenannte *Variationsmaß* zu μ. Ferner definiert $\|\mu\| := |\mu|(X)$ eine Norm auf $\mathcal{M}(X)$, die sogenannte *Variationsnorm*. Der so normierte Raum $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|)$ ist vollständig.

Sei $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Dann können $\operatorname{Re}\mu$ und $\operatorname{Im}\mu$ jeweils als Differenz zweier positiver Maße geschrieben werden (*Hahn-Jordan-Zerlegung*), so dass

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + \mathrm{i}(\mu_3 - \mu_4)$$

mit endlichen positiven Maßen $\mu_1, \dots, \mu_4$ auf X; insbesondere gilt $|\mu| \le \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$ und $\mu_j \le |\mu|$ für alle $j \in \{1, \dots, 4\}$.

Eine messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ heißt *μ-integrierbar*, wenn sie $|\mu|$-integrierbar ist, d.h. wenn sie bzgl. jedem μ_j, $j \in \{1, \dots 4\}$, integrierbar ist. In dem Fall setzt man

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu := \int_X f\,\mathrm{d}\mu_1 - \int_X f\,\mathrm{d}\mu_2 + \mathrm{i}\int_X f\,\mathrm{d}\mu_3 - \mathrm{i}\int_X f\,\mathrm{d}\mu_4\,.$$

Es gilt die wichtige Ungleichung

$$\Big|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\Big| \le \int_X |f|\,\mathrm{d}|\mu|\,.$$

Beispiel 1.

(a) *Jedes $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ vermittelt über $\mu_f(B) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} \chi_B(t) f(t)\,\mathrm{d}t$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n)$, ein komplexes Maß $\mu_f \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ mit $|\mu_f|(B) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} \chi_B(t)|f(t)|\,\mathrm{d}t$ und insbesondere $\|\mu_f\| = \|f\|_{L^1}$. Ferner ist eine messbare Funktion $g\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ genau dann*

μ_f-integrierbar, wenn $g \cdot f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, und in dem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{T}^n} g(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} g(t) f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(b) *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert analog $\mu_f(B) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(t) f(t)\,\mathrm{d}t$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, ein komplexes Maß $\mu_f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Für dieses Maß gelten analoge Aussagen zu (a); man beachte, dass hierbei auf den Normierungsfaktor $\frac{1}{(2\pi)^n}$ verzichtet wird.*

(c) *Für $a \in X$ definiert*

$$\delta_a(B) := \begin{cases} 1\,, & a \in B \\ 0\,, & a \notin B \end{cases}\,, \quad B \in \mathfrak{B}(X)\,.$$

ein endliches positives Maß $\delta_a \in \mathcal{M}(X)$, das sogenannte Diracmaß in a. *Dieses Maß besitzt keine Darstellung der Form $\delta_a = \mu_f$ mit μ_f wie in (a) bzw. (b).*

Wir schreiben

$$C_0(\mathbb{R}^n) := \left\{ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ stetig } \;\middle|\; \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}$$

und versehen $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm, die wir mit $\|\cdot\|_{C_0(\mathbb{R}^n)}$ notieren. Für eine geschlossene Darstellung setzen wir zur Einfachheit ferner $C_0(\mathbb{T}^n) := C(\mathbb{T}^n)$ mit der üblichen Supremumsnorm $\|\cdot\|_{C_0(\mathbb{T}^n)} := \|\cdot\|_{C(\mathbb{T}^n)}$. Man zeigt leicht, dass der so normierte Raum $(C_0(X), \|\cdot\|_{C_0(X)})$ vollständig ist.

Für $\mu \in \mathcal{M}(X)$ definiert nun

$$C_0(X) \ni f \mapsto (T\mu)(f) := \int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

eine stetige lineare Abbildung mit $|(T\mu)(f)| \le \int_X |f|\,\mathrm{d}|\mu| \le \|f\|_{C_0(X)} \cdot \|\mu\|$. Es gilt also $T\mu \in C_0(X)'$, wobei $C_0(X)'$ den Dualraum von $C_0(X)$ bezeichnet. Tatsächlich ist jede stetige lineare Abbildung aus $C_0(X)'$ von dieser Form:

Satz 2 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Die Zuordnung $\mathcal{M}(X) \ni \mu \mapsto T\mu$ vermittelt einen linearen isometrischen Isomorphismus zwischen $\mathcal{M}(X)$ und $C_0(X)'$, d.h. die Zuordnung ist linear und bijektiv mit*

$$\|T\mu\| := \sup_{\substack{f \in C_0(X) \\ \|f\|_{C_0(X)} = 1}} |(T\mu)(f)| = \|\mu\| \quad \textit{für alle} \quad \mu \in \mathcal{M}(X)\,.$$