Perkolationstheorie

Übungsblatt 1

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

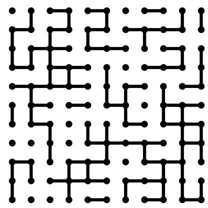
Aufgabe 1.1 (4 Punkte)**.** Wir betrachten auf dem Graphen $\mathbb{Z}^d$ mit dem in der Vorlesung eingeführten messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ die terminale σ-Algebra $\mathcal{A}_\infty$ bezüglich der Folge von Unter-σ-Algebren, $\big(\sigma(A_{\{e\}})\big)_{e\in E}$. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Ereignisse in $\mathcal{A}_\infty$ liegen:

a) Es gibt keinen unendlichen Cluster.

b) Es existieren genau 42 unendliche Cluster.

c) Der unten gezeichnete Teilgraph taucht im zufälligen Graphen (V, E_ω) unendlich oft auf.

d) Der unten gezeichnete Teilgraph kommt im zufälligen Graphen (V, E_ω) nirgends vor.



Aufgabe 1.2 (4 Punkte)**.** *Erinnerung: In der Vorlesung hatten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Größe $\sigma(n)$ definiert als die Menge der selbstvermeidenden Pfade der Länge $n \in \mathbb{N}$ im Graphen $\mathbb{Z}^d$, die bei 0 starten.*

a) Zeigen Sie: $\sigma(m+n) \leq \sigma(m) \cdot \sigma(n)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt *subadditiv*, wenn für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m+n) \leq f(m) + f(n).$$

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ subadditiv. Zeigen Sie, dass $(f(n)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen eine Zahl in $[-\infty, \infty)$ konvergiert.

(Möglicher Tipp (für den Fall, dass Sie nicht weiterkommen). Sei $q \in \mathbb{N}$ und $n \geq q$. Dann lässt sich $n = k \cdot q + r$ schreiben, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, \dots, q-1\}$. Schätzen Sie nun $f(n)/n$ unter Ausnutzung der Subadditivität gegen etwas ab, das den Ausdruck $f(q)/q$ enthält. Schicken Sie dann $n \to \infty$ und bemerken Sie, dass die Argumentation für alle $q \in \mathbb{N}$ funktioniert. Nehmen sie schließlich $\inf_{q\in\mathbb{N}}$ und folgern Sie die Aussage.)

c) Folgern Sie, dass der Limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\sigma(n))}{n}$$

als reelle Zahl existiert und zeigen Sie, dass er positiv ist.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)**.** Finden Sie zu den angegebenen planar eingebetteten Graphen jeweils den dualen Graphen. Eine Skizze und eine kurze Beschreibung sind ausreichend; eine formale Definition des dualen Graphen wird nicht verlangt.

a) Der Graph, der von der Sechseckparkettierung erzeugt wird.

b) Der Graph, der von der Parkettierung in Bild (b) erzeugt wird.

c) Der Graph, der von der Parkettierung in Bild (c) erzeugt wird.

d) Der Graph, der vom Kagome-Gitter erzeugt wird; siehe Parkettierung (d).

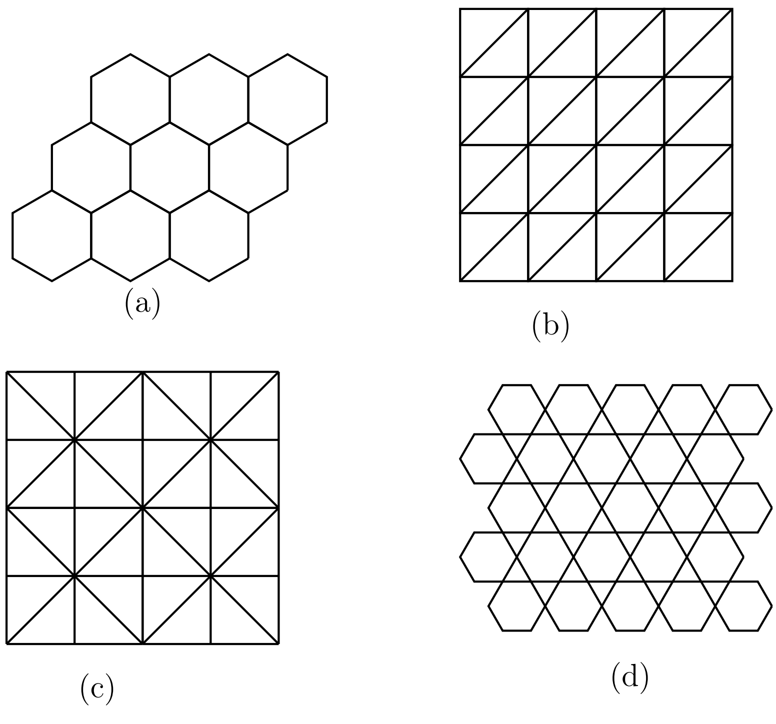


Abbildung 1: Planare Graphen zu Aufgabe 1 a)-d)

Der Ergodensatz abstrahiert (unter anderem) die Situation in der Perkolation. Die hier zitierte $\mathbb{Z}^d$-Version stammt aus [Kel98, 2.1.5 Theorem]. Eine eindimensionale Version findet sich in [Kle08, Satz 20.14]. Klassische Quellen sind [Wal82; Kre85].

Definition. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $T\colon \mathbb{Z}^d \times \Omega \to \Omega$ bzw. die Familie von Abbildungen $T_a\colon \Omega \to \Omega$, $a \in \mathbb{Z}^d$, gegeben durch $T_a := T(a, \cdot\,)$ heißt *maßerhaltende Gruppenwirkung*, wenn

(i) T_a für alle $a \in \mathbb{Z}^d$ das Maß P erhält:

$$\forall A \in \mathcal{A}\colon\ \mathrm{P}(T_a^{-1}(A)) = \mathrm{P}(A),$$

(ii) T_0 ist die identische Abbildung auf Ω ist, und für alle $a, b \in \mathbb{Z}^d$ gilt:

$$T_{a+b} = T_a \circ T_b.$$

Theorem (Ergodensatz für $\mathbb{Z}^d$)**.** *Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T\colon \mathbb{Z}^d \times \Omega \to \Omega$ eine maßerhaltende Gruppenwirkung. Weiter sei*

$$\mathcal{I} := \{A \in \mathcal{A}\colon \forall a \in \mathbb{Z}^d\colon T_a^{-1}(A) = A\}$$

die σ-Algebra der T-invarianten Ereignisse und $B(n) := [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$. Dann existiert für alle integrierbaren Zufallsvariablen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ der folgende Limes P*-fast sicher und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\#B(n)} \sum_{z \in B(n)} X \circ T_a = \mathrm{E}[X \mid \mathcal{I}] \quad \mathrm{P}\text{-fast sicher.}$$

Aufgabe 1.4 (4 Punkte)**.** Wir übernehmen die Notation aus dem Ergodensatz.

a) Erklären Sie mindestens eine Möglichkeit, wie der Ergodensatz in der Perkolationstheorie anwendbar ist.

b) Zeigen Sie ohne Verwendung des Ergodensatzes für eine beschränkte Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$: Falls

$$\overline{X} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\#B(n)} \sum_{a \in B(n)} X \circ T_a$$

existiert, so ist $\overline{X}$ fast sicher invariant unter der Gruppenwirkung T, das heißt

$$\forall b \in \mathbb{Z}^d\colon \overline{X} \circ T_b = X \quad \text{fast sicher.}$$

Bemerkung: Der Beweis der Existenz von $\overline{X}$ ist der schwierigere Teil im Beweis des Ergodensatzes.

Abgabe bis Mittwoch, 11. November 2020 per Email.

Literatur

[Kel98] G. Keller. *Equilibrium States in Ergodic Theory*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1998. ISBN: 9781107359987. DOI: 10.1017/CBO9781107359987 (siehe S. 3).

[Kle08] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 2. Aufl. Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-76317-8. DOI: 10.1007/978-3-540-77571-3 (siehe S. 3).

[Kre85] U. Krengel. *Ergodic Theorems*. De Gryter Studies in Mathematics 6. De Gryter, 1985. ISBN: 978-3-11-008478-8. DOI: 10.1515/9783110844641 (siehe S. 3).

[Wal82] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics 79. Springer, 1982. ISBN: 978-0-387-95152-2 (siehe S. 3).