Perkolationstheorie

Übungsblatt 2

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 18. November 2020 per Email.

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)**.** Wir betrachten Perkolation auf $\mathbb{Z}^d$. Wir hatten in Vorlesung definiert:

$$\theta(p) := \mathrm{P}_p(0 \text{ liegt in unendlichem Cluster}).$$

Geben Sie einen vollständigen Beweis dafür, dass die Abbildung $[0,1] \ni p \mapsto \theta(p)$ isoton ist.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)**.** Sei $\mathcal{T}_k$ der reguläre Baumgraph vom Grad k, das heißt, jeder Vertex hat genau k Nachbarn. Zeigen Sie, dass die kritische Perkolationswahrscheinlichkeit p_c auf $\mathcal{T}_{n+1}$ größer oder gleich $1/n$ ist.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die kritische Perkolationswahrscheinlichkeit auf $\mathcal{T}_{n+1}$ kleiner oder gleich $1/n$ ist. Tipp: Vielleicht hilft die second moment method.

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)**.** Wir betrachten Perkolation auf $\mathbb{Z}^d$ im superkritischen Regime. In dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Oberfläche des (eindeutigen) unendlichen Clusters proportional zu dessen Volumen wächst. Dazu definieren wir die Menge der inneren Kanten des unendlichen Clusters $I \subset \mathbb{Z}^d$ als

$$I_e := \{f \in E \mid f \text{ aktiv und beide Endpunkte gehören zu } I\}$$

sowie den Kantenrand als

$$\Delta I := \{f \in E \mid f \text{ passiv und mindestens ein Endpunkt von } e \text{ gehört zu } I\}.$$

a) Zeigen Sie, dass es Konstanten c_1, c_2 gibt, so dass fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|B(n) \cap \Delta I|}{|B(n)|} = c_1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|B(n) \cap I_e|}{|B(n)|} = c_2$$

gelten, wobei wir mit $B(n) \cap A$ die Menge an Kanten in $A \subseteq E$ bezeichnen, deren beide Endpunkte in $B(n)$ liegen.

Tipp: Definieren Sie $\beta(f) := \mathbf{1}_{\{f\in\Delta I\}}$ und $\gamma(f) := \mathbf{1}_{\{f\in I_e\}}$ für $f \in \mathbb{Z}^d$ und nutzen Sie Ergodizität.

b) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|B(n) \cap I_e|}{|B(n) \cap \Delta I|} = \frac{p}{1-p}.$$

Tipp: Das Ereignis $A_f := \{\text{ein Endpunkt von } f \text{ liegt in } I\}$ ist unabhängig vom Zustand der Kante f.