Perkolationstheorie

Übungsblatt 3

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 25. November 2020 per Email.

Ziel der folgenden zwei Aufgaben ist es, Betrachtungen über *Knotenperkolation* oder *Vertexperkolation* anstellen. Dazu ist es nützlich, folgenden Begriff einzuführen:

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Graph $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ heißt *Kantengraph* bezüglich G (engl: line graph), wenn eine Bijektion $b\colon \tilde{V} \to E$ zwischen $\tilde{V}$ und E existiert, so dass zwei Knoten $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$ in $\tilde{V}$ genau dann durch eine Kante in $\tilde{E}$ verbunden sind, wenn die zugehörigen Kanten $b(\tilde{v}_1)$ und $b(\tilde{v}_2)$ einen gemeinsamen Endpunkt haben.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)**.**

a) Finden Sie den Kantengraph für das $\mathbb{Z}^2$-Gitter.

b) Finden Sie den Kantengraph für das hexagonale Gitter.

c) Finden Sie den Kantengraph für den in Teilaufgabe b) gefundenen Graphen.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)**.** In der Vorlesung wurde der *Kantenperkolationsprozes* auf einem Graphen $G = (V, E)$ definiert, bei dem Kanten $e \in E$ unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ aktiv sind.

a) Definieren Sie nun einen *Knotenperkolationsprozess*, bei dem Knoten $v \in V$ unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ aktiv sind. Beschreiben Sie dabei insbesondere Knoten- und Kantenmnenge des zufälligen Graphen.

b) Sei G Graph mit endlichem Knotengrad und $\tilde{G}$ der Kantengraph von G. Zeigen Sie, dass der Knotenperkolationsprozess auf $\tilde{G}$ und der Kantenperkolationsprozes auf G dieselbe Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines unendlichen Clusters haben.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie die Harris-Ungleichung aus der Vorlesung: Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n-isoton und $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, reelwertige Zufalllsvariablen. Zeigen Sie, dass dann für $X = (X_1, \dots, X_n)$ gilt:

$$\mathrm{E}\left[f(X)g(X)\right] \geq \mathrm{E}[f(X)]\,\mathrm{E}[g(X)].$$

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)**.** Wir betrachten den Perkolations-Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A_1, \dots, A_n$ wachsende Ereignisse, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, und sei $r := \mathrm{P}_p(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$. Zeigen Sie, dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\mathrm{P}_p(A_i) \geq 1 - (1 - r)^{1/n}.$$