Perkolationstheorie

Übungsblatt 4

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 2. Dezember 2020 per Email.

Für $S \subseteq \overline{n} := \{1, \ldots, n\}$ und $A, B \subseteq \Omega := \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j$ für endliche Ω_j wurden in der Vorlesung

$$A\restriction_S := \{\omega \in \Omega \mid \forall \tilde{\omega} \colon \tilde{\omega}\restriction_S = \omega\restriction_S \implies \tilde{\omega} \in A\}$$

und

$$A \circ B := \{\omega \in \Omega \mid \exists S, T \subseteq \overline{n} \colon S \cap T = \emptyset, \omega \in A\restriction_S \cap B\restriction_T\}$$

definiert. Für alle $\omega \in A\restriction_S$ nennt man die Menge S einen *Zeugen von A für ω*.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)**.** Im Setting von oben seien $A, B \subseteq \Omega$.

a) Beschreiben Sie $A\restriction_{\overline{n}}$ und $A\restriction_\emptyset$.

b) Seien $S \subseteq \overline{n}$. Gilt $A\restriction_S \subseteq A$, $A \subseteq A\restriction_S$ oder keines von beiden?

c) Seien $S \subseteq T \subseteq \overline{n}$ und $A \subseteq B$. Zeigen Sie $A\restriction_S \subseteq A\restriction_T \subseteq B\restriction_T$.

d) Zeigen Sie

$$A \circ B = \bigcup_{S \subseteq \overline{n}} (A\restriction_S \cap B\restriction_{S^c}).$$

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)**.** Seien $A, B, C \subseteq \Omega$ und $S, T \subseteq \overline{n}$. Zeigen Sie:

a) $A\restriction_S \cap B\restriction_S = (A \cap B)\restriction_S$ und $A\restriction_S \cup B\restriction_S \subseteq (A \cup B)\restriction_S$.

b) $(A\restriction_S)\restriction_T = A\restriction_{S \cap T}$.

c) $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)**.** Seien nun $\Omega_j = \{0, 1\}$, also $\Omega = \{0, 1\}^n$, und A und B wachsende Ereignisse.

a) Zeigen Sie, dass $A\restriction_S$ für alle $S \subseteq \overline{n}$ wachsend ist.

b) Zeigen Sie, dass $A \circ B$ wachsend ist.

c) Zeigen Sie für alle $\omega \in A$, dass es einen Zeugen $S \subseteq \overline{n}$ für A von ω gibt, so dass $\omega_j = 1$ für alle $j \in S$ erfüllt ist.

d) Sei nun zusätzlich $C \subseteq \Omega$ fallend. Beweisen Sie $A \circ C = A \cap C$. Folgern Sie in diesem Fall $\mathrm{P}_p(A \circ C) \leq \mathrm{P}_p(A)\,\mathrm{P}_p(C)$.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)**.** Wir betrachten Kantenperkolation auf $\mathbb{Z}^d$.

a) Finden Sie zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$, die von endlich vielen Koordinaten abhängen, so dass $\mathrm{P}_p(A \circ B) < \mathrm{P}_p(A)\,\mathrm{P}_p(B)$.

b) Seien $f, e \in E$ und $A_e := \{e \text{ aktiv}\}$ sowie $A_f := \{f \text{ aktiv}\}$. Zeigen Sie ohne FKG- und BK-Ungleichung

$$\mathrm{P}_p(A_e \circ A_f) \leq \mathrm{P}_p(A_e)\,\mathrm{P}_p(A_f) \leq \mathrm{P}_p(A_e \cap A_f).$$

c) Verwenden Sie die BK-Ungleichung, um zu zeigen, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathrm{P}_p(\{x \longleftrightarrow y\} \circ \{y \longleftrightarrow z\}) \leq \mathrm{P}_p(x \longleftrightarrow y)\,\mathrm{P}_p(y \longleftrightarrow z)$$

gilt. *Vorsicht: Die Ereignisse hängen von unendlich vielen Kanten ab, also kann man die BK-Ungleichung nicht direkt anwenden!*