Perkolationstheorie

Übungsblatt 5

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 9. Dezember 2020 per Email.

Aufgabe 5.1. Beweisen Sie Aussage (b), (c) und (d) aus den Russo-Ungleichungen: Bezeichne $R_L(p)$ die Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Links-Rechts-Verbindung aus aktiven Kanten in $\Lambda_L = [-L, L]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ und $R_{L,n}(p)$ die Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Links-Rechts-Verbindung in $[-nL, nL] \times [-L, L] \cap \mathbb{Z}^2$ bei Perkolationsparameter p. Weiter sei $A_L(p)$ die P_p-Wahrscheinlichkeit für einen geschlossenen aktiven Pfad innerhalb von Λ_{3L}, der Λ_L umrundet. Zeigen Sie dann:

b) $R_{L,2}(p) \geq \left(R_{L,\frac{3}{2}}(p)\right)^2 \cdot R_L(p)$,

c) $R_{L,3}(p) \geq \left(R_{L,2}(p)\right)^2 \cdot R_L(p)$,

d) $A_L(p) \geq \left(R_{L,3}(p)\right)^4$.

Aufgabe 5.2. Wir betrachten das Quadrat $\Lambda_L = [-L, L]^2 \cap \mathbb{Z}^d$. Zeigen Sie: Wenn es in Λ_L einen aktiven Pfad gibt, der den linken mit dem rechten Rand von Λ_L verbindet, dann gibt es auch eine eindeutige niedrigste Verbindung.
Möglicher Tipp: Betrachten Sie den dualen Graphen.

Aufgabe 5.3. Betrachten Sie das Rechteck $([0, L] \times [1, L]) \cap \mathbb{Z}^2$ Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für eine aktive Bahn von der linken zur rechten Seite des Rechtecks unter $\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}$.

Hinweis: Das duale Rechteck ist $\left(([1, L] \times [0, L]) \cap \mathbb{Z}^2\right) + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

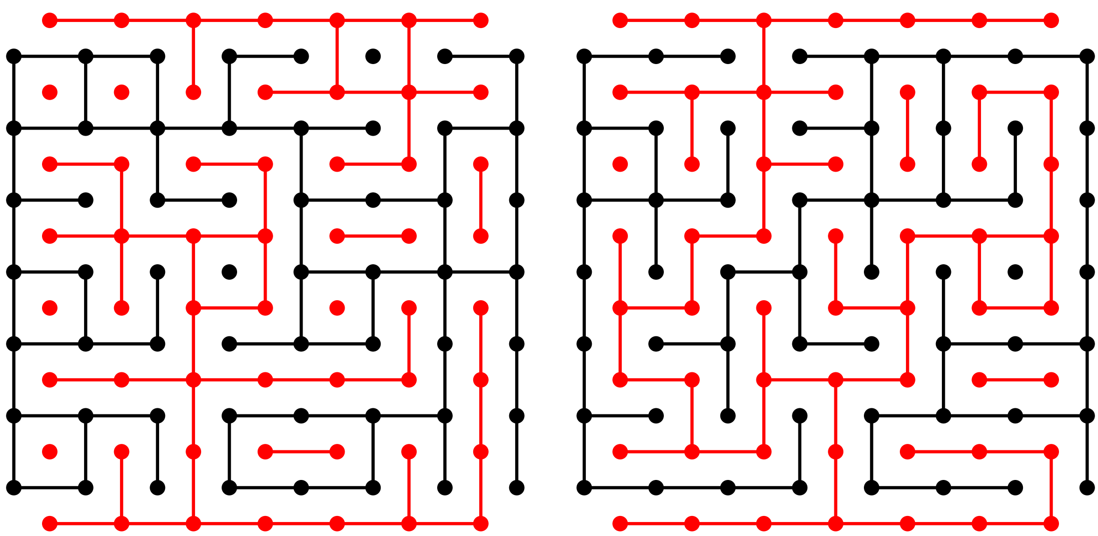

Abbildung 1: Zu Aufgabe 5.3 mit $L = 7$.

Aufgabe 5.4. Sei $\mathcal{T}_{k+1}$ der reguläre Baum, bei dem jeder Knoten Grad $k + 1$ hat. Wir wissen schon, dass die kritische Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines unendlichen Clusters $p_c = \frac{1}{k}$ ist. Berechnen Sie den Erwartungswert $\chi(p) := \mathrm{E}[|C|]$ des Clusters bei 0.