Perkolationstheorie

Übungsblatt 6

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 16. Dezember 2020 per Email.

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)**.**

a) Im Beweis von Satz 6.1 wird

$$\prod_{k=0}^{\infty}\Big(1-\frac{\mathrm{e}^{-2^k}}{16}\Big)>0$$

verwendet. Beweisen Sie dies.

b) Für Kantenperkolation auf $\mathbb{Z}^d$ mit $d \geq 2$ ist $\theta(p) = \lim_{L\to\infty} P_L(p)$ für

$$P_L(p) := \mathrm{P}_p(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_L).$$

Weiter ist

- $\mathbb{N} \ni L \mapsto P_L(p)$ antiton für jedes $p \in [0,1]$
- $[0,1] \ni p \mapsto P_L(p)$ ein isotones Polynom für jedes $L \in \mathbb{N}$.

Folgern Sie, dass die Abbildung $p \mapsto \theta(p)$ rechtsstetig ist.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)**.** Für Kantenperkolation auf $\mathbb{Z}^d$ mit Parameter $p \in [0,1]$ definieren wir für alle $x, y \in \mathbb{Z}^d$

$$\tau_p(x,y) := \mathrm{P}_p(x \longleftrightarrow y).$$

Die Abbildung $p \mapsto \tau_p(x,y)$ wird *Konnektivitätsfunktion* der Punkte x und y genannt. Zeigen Sie, dass für alle $p \in [0,1]$ der Grenzwert

$$\varphi(p) := \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}|\ln \tau_p(0, ne_1)|$$

existiert, wobei $e_1 := (1,0,\dots,0)$ der erste Einheitsvektor ist.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)**.** Wir definieren

$$L_0 := L_0(p) := \inf\big\{L \in \mathbb{N} \colon R^{\mathrm{dual}}_{L,2}(p) \geq 1 - \tfrac{1}{16\mathrm{e}}\big\}$$

mit

$$R^{\mathrm{dual}}_{L,2}(p) := \mathrm{P}_p\big(\text{Es gibt eine Rechts-Links-Querung im dualen Gitter von } \big([0,2L]\times[0,L]\big)\cap\mathbb{Z}^2\big).$$

a) Zeigen Sie für $L \geq L_0$ die Ungleichung $\tau_p(0, Le_1) \leq 1 - (R^{\mathrm{dual}}_{L,2}(p))^4$.

b) Nehmen Sie an, dass $L = 2^k L_0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt und zeigen Sie

$$\tau_p(0, Le_1) \leq \mathrm{e}^{-L/L_0}.$$

Tipp: Reskalierungslemma!

c) Folgern Sie $\varphi(p) \geq 1/L_0$.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)**.** Wir bezeichnen U und V die langen Seiten des Rechtecks $\Lambda_{L,2} := \big([0,2L]\times[0,L]\big)\times\mathbb{Z}^2$. Zeigen Sie für $x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{Z}^d$

a) $\big(\tau_p(0,x)\big)^2 \leq \tau_p(0, 2x_1e_1)$,

b) $\tau_p(0,x) \leq \exp\big(-x_1\varphi(p)\big)$,

c) $1 - R^{\mathrm{dual}}_{L-1,2}(p) \leq \sum_{x\in U, y\in V} \tau_p(x,y)$,

d) Es gibt positive Konstanten c_1, c_2 mit $\varphi(p) \leq \dfrac{c_1\ln(L_0)+c_2}{L_0-1}$.