Perkolationstheorie

Übungsblatt 7

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 6. Januar 2021 per Email.

Sei $(G, e, \circ)$ eine Gruppe und $S \subseteq G$.

- S heißt *symmetrisch*, wenn $S = S^{-1} := \{s^{-1} \mid s \in S\}$.
- S ist ein *Erzeugendensystem* von G, wenn sich jedes Element $g \in G$ als Verknüpfung (in G) von endlich vielen Elementen aus S oder Inversen von Elementen aus S darstellen lässt.

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)**.** Der (ungerichtete) *Cayley-Graph* $\Gamma = \Gamma(G, S) = (V, E)$ einer Gruppe G bezüglich dem endlichen, symmetrischen Erzeugendensystem $S \sqsubset G$ hat die Knotenmenge $V := G$ und die Kantenmenge

$$E := \big\{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S\big\}.$$

Beweisen Sie:

a) Der Gittergraph $\mathbb{Z}^d$ mit der Graphenstruktur aus der Vorlesung ist ein Cayley-Graph.

b) Der reguläre Baum $\mathcal{T}_{k+1}$ ist ein Cayley-Graph.

c) Γ ist *vertex-transitiv*: Für alle $v, w \in V$ gibt es einen Graphenautomorphismus $f\colon \Gamma \to \Gamma$ mit $f(v) = w$.

d) Für alle Knoten $v, w \in V$ ist $\mathrm{P}(|C(v)| = \infty) = \mathrm{P}(|C(w)| = \infty)$.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass es für $p > p_c = \frac{1}{k}$ auf dem Baumgraphen $\mathcal{T}_{k+1}$ mit $k \geq 2$ fast sicher unendlich viele unendlich große Cluster gibt.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)**.** Wir betrachten Kantenperkolation auf einem vertextransitiven Cayley-Graph $\Gamma = \Gamma(G, S) = (V, E)$, bei dem es fast sicher höchstens einen unendlich großen Cluster gibt. (Dies wird später in der Vorlesung für $\mathbb{Z}^d$ gezeigt.) Seien $x, y \in V$. Wir wollen zeigen, dass die Zwei-Punkt-Konnektivitätsfunktion

$$[0, 1] \ni p \mapsto \tau_p(x, y) := \mathrm{P}_p(x \longleftrightarrow y)$$

stetig ist. Dazu setzen wir $B(n) := S^{\circ n} = S \circ S \circ \cdots \circ S$ mit der Gruppenoperation $\circ$ und $\partial B(n) := \{v \in B(n) \mid \exists w \in G \setminus B(n)\colon v \sim w\}$.

a) Zeigen Sie, dass $p \mapsto \tau_p(x, y)$ unterhalbstetig ist.

b) Sei

$$\tau_p^+(x, y, n) := \mathrm{P}_p\big(\{x \overset{B(n)}{\longleftrightarrow} y\} \cup \{x \longleftrightarrow \partial B(n), y \longleftrightarrow \partial B(n)\}\big).$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \ni n \mapsto \tau_p^+(x, y, n)$ für große n monoton fallend ist und identifizieren Sie $\lim_{n\to\infty} \tau_p^+(x, y, n)$.

c) Folgern Sie, dass $p \mapsto \tau_p(x, y)$ oberhalbstetig ist.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)**.** Wir betrachten Perkolation auf $\mathbb{Z}^d$ mit den in der Vorlesung eingeführten Perkolations-Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}_p)$, $p \in [0, 1]$. Sei X eine (fast sicher endliche) Zufallsvariable, die nur von einer endlichen Kantenmenge E abhängt (insbesondere ist X damit integrierbar). Zeigen Sie

$$\frac{\partial}{\partial p} \mathrm{E}_p(X) = \sum_e \mathrm{E}_p[\delta_e X] \quad \text{mit} \quad \delta_e X = X|_{\omega_e = 1} - X|_{\omega_e = 0}.$$