Perkolationstheorie

Übungsblatt 8

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 13. Januar 2021 per Email.

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $x \neq y$, dass

$$[0,1] \ni p \mapsto \mathrm{P}_p(x \longleftrightarrow y)$$

strikt wachsend ist.

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)**.** Im Beweis von Proposition 9.3 aus der Vorlesung wurde gezeigt, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{Z}^d$ mit $|x| \geq N_0$ die Ungleichung

$$\mathrm{P}_p(A \cap \tau_x B) \leq \mathrm{P}_p(A)\,\mathrm{P}_p(B) + 4\varepsilon$$

erfüllt ist. Führen Sie die umgekehrte Ungleichung aus und folgern Sie, dass der Limes

$$\lim_{|x|\to\infty} \mathrm{P}_p(A \cap \tau_x B)$$

existiert und den Wert $\mathrm{P}_p(A)\,\mathrm{P}_p(B)$ hat.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)**.** Im Beweis von Lemma 10.3 wurde gezeigt, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $S \sqsubset \mathbb{Z}^d$ mit $\phi_p(S) \in (0,1)$ gibt, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\mathrm{P}_p(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_{k\cdot m}) \leq \big(\phi_p(S)\big)^m$$

gilt. Erweitern Sie dieses Ergebnis zur in Lemma 10.3 behaupteten Aussage

$$\exists \sigma(p) > 0\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon\ \mathrm{P}_p(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq \mathrm{e}^{-n\sigma(p)}.$$

Aufgabe 8.4 (4 Punkte)**.** Folgern Sie mit Hilfe von Satz 10.1 $p_c = \pi_c$ für die Kantenperkolation auf $\mathbb{Z}^d$.