Perkolationstheorie

Übungsblatt 9

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 20. Januar 2021 per Email.

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)**.** Wir fixieren $p < p_c$. Zeigen Sie, dass es ein $C_p > 0$ gibt, so dass in der Box Λ_n mit hoher Wahrscheinlichkeit kein Cluster mit Radius $r_n := \lceil C_p \log n \rceil$ für $n \in \mathbb{N}$ existiert, d. h.

$$\mathrm{P}_p\big(\exists x \in \Lambda_n \colon x \longleftrightarrow \partial\Lambda_{r_n}(x)\big) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Formalisieren und beweisen Sie auch die folgende Aussage: Es gibt eine Konstante $C_p' > 0$, so dass mit hoher Wahrscheinlichkeit in der Box Λ_n kein Cluster der Größe $r_n' := \lceil C_p' \log n \rceil$ ist.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)**.** Es sei $p \in (0, p_c)$ und $x \in \mathbb{Z}^d$. In dieser Aufgabe geht es um folgende Aussage: Es gibt eine (von p und x unabhängige) Konstante $C = C(d) > 0$ mit

$$\frac{C \exp\big(-\|x\|_1/\xi(p)\big)}{\|x\|_1^{d(d-1)}} \le \mathrm{P}_p(0 \longleftrightarrow x) \le \exp\big(-\|x\|_\infty/\xi(p)\big).$$

a) Zeigen Sie $\big(\mathrm{P}_p(0 \longleftrightarrow x)\big)^2 \le \mathrm{P}_p(0 \longleftrightarrow 2\|x\|_\infty e_1)$ und schlussfolgern Sie die rechte Ungleichung der Behauptung.

b) Wenden Sie Satz 11.4 sukzessive entlang der Koordinatenachsen an und verwenden Sie am Schluss die Ungleichung $|x_1 x_2 \cdots x_d|^{1/d} \le \|x\|_1/d$. Zeigen Sie so die linke Ungleichung.

Aufgabe 9.3. Wir nehmen an, zwei reellwertige Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erfüllen für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \le n$ die verallgemeinerte Subadditivitätsbedingung

$$x_{m+n} \le x_m + x_n + a_m.$$

Zusätzlich soll

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{k} = 0$$

gelten. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{x_k + a_k}{k}$$

und verbessern Sie damit, ausgehend vom Zwischenergebnis

$$\forall m \le n \in \mathbb{N} \colon \theta_{m+n}(p) \le 2d(3m)^{d-1}\theta_m(p)\theta_n(p),$$

die untere Abschätzung aus Satz 11.4.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die kritische Wahrscheinlichkeit

$$p_c^s(d) := \sup\{p \in [0,1] \mid \mathrm{P}_p^s(0 \longleftrightarrow \infty) = 0\} := \sup\{p \in [0,1] \mid \mathrm{P}_p^s(|C| = \infty) = 0\}$$

bei Knotenperkolation auf $\mathbb{Z}^d$ mit $d \ge 2$ im Intervall $(0, 1)$ liegt.