Perkolationstheorie

Übungsblatt 10

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 27. Januar 2021 per Email.

Aufgabe 10.1. Beweisen Sie für alle $p \in (0,1)$ und $m, n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{1}{m+n} \mathrm{P}_p\big(|C| = m+n\big) \geq \frac{p}{(1-p)^2} \frac{1}{m} \mathrm{P}_p\big(|C| = m\big) \frac{1}{n} \mathrm{P}_p\big(|C| = n\big).$$

Tipp: Setzen Sie zwei Gittertierchen der Größen m und n auf eindeutige Weise zusammen.

Aufgabe 10.2. Diese Aufgabe setzt die Aussage von Aufgabe 10.1 und $p < p_c$ voraus.

a) Zeigen Sie, dass

$$\zeta(p) := \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\log \mathrm{P}_p(|C| = n)|\Big)^{-1}$$

existiert und endlich ist sowie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}_p(|C| = n) \leq \frac{(1-p)^2}{p} n \mathrm{e}^{-n/\zeta(p)}.$$

b) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}_p(|C| \geq n) = \mathrm{e}^{-\frac{n}{\zeta(p)} + o(n)}.$$

In den folgenden beiden Aufgaben betrachten wir i. i. d. Kantenperkolation auf zusammenhängenden und lokal endlichen (d. h. jeder Knoten hat endlichen Grad) Graphen $G = (V, E)$. Die Anzahl der unendlichen Cluster bezeichnen wir mit N.

Aufgabe 10.3.

a) Zeigen Sie $\mathrm{P}_p(N = 0) \in \{0,1\}$, $\mathrm{P}_p(N = \infty) \in \{0,1\}$ und $\mathrm{P}_p(1 \leq N < \infty) \in \{0,1\}$.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen Graphen mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt ein $p \in [0,1]$ und $j, k \in \mathbb{N}$ mit $j < k$ und

$$\mathrm{P}_p(N = j) > 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{P}_p(N = k) > 0.$$

Aufgabe 10.4.

a) Beweisen Sie: Für alle $p \in (0,1)$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $c > 0$, so dass

$$\mathrm{P}_p(N = 1) \geq c\, \mathrm{P}_p(N = k).$$

b) Konstruieren Sie einen Graphen und ein $p \in [0,1]$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}_p(N = k) > 0.$$