Perkolationstheorie

Übungsblatt 11

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 3. Februar 2021 per Email.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)**.** Sei $S \sqsubset E$ eine (deterministische) endliche Kantenmenge, $N\colon \Omega \to \mathbb{N}_0$ die (zufällige) Anzahl der aktiven Kanten in S und A ein Ereignis, das nur von den Kanten in S abhängt.

a) Beweisen Sie für $p \in (0,1)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{P}_p(A) = \frac{\mathrm{Cov}_p(N, \mathbf{1}_A)}{p(1-p)}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\mathrm{P}_p(A)$ als Summe über alle Elementarereignisse.

b) Schlussfolgern Sie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{P}_p(A) \leq \sqrt{\frac{|S|\,\mathrm{P}_p(A)(1-\mathrm{P}_p(A))}{p(1-p)}}.$$

c) Beweisen Sie außerdem für ein wachsendes Ereignis A

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{P}_p(A) \geq \frac{\mathrm{P}_p(A)(1-\mathrm{P}_p(A))}{p(1-p)}.$$

Tipp: Vergewissern Sie sich, dass die Zufallsvariable $N - \mathbf{1}_A$ wachsend ist.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)**.** Sei A ein wachsendes Ereignis, das nur von endlich vielen Kanten abhängt.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $h(p) := \mathrm{P}_p(A)$ für $p \in (0,1)$ und $\gamma \geq 1$

$$h(p^\gamma) \leq \big(h(p)\big)^\gamma$$

erfüllt. *Tipp:* Induktion über die Anzahl der Kanten, von denen A abhängt!

b) Folgern Sie, dass die Funktion

$$(0,1) \ni p \mapsto \frac{\ln \mathrm{P}_p(A)}{\ln p}$$

monoton fällt. *Hinweis:* Vergleichen Sie an den Stellen $p > p'$ und definieren Sie $\gamma \geq 1$ so, dass $p' = p^\gamma$ erfüllt ist.

c) Schließen Sie weiter auf

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{P}_p(A) \geq \frac{\mathrm{P}_p(A)\ln \mathrm{P}_p(A)}{p \ln p}.$$

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die i. i. d. Kantenperkolation auf $\mathbb{Z}^d$.

a) Zeigen Sie, dass die Korrelationslänge $\xi\colon (0,1) \to (0,\infty]$ monoton wächst. *Tipp:* Wenden Sie Aufgabe 11.2b) auf das Ereignis $A := \{0 \longleftrightarrow \partial\Lambda(n)\}$ an.

b) Zeigen Sie $\xi(p_c) = \infty$.
Hinweis: Leiten Sie aus Satz 11.4 die Stetigkeit von $p \mapsto \frac{1}{\xi(p)}$ her.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)**.** Seien $p = 1 - q \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}$,

$$g_m(y) := m \ln\Big(\frac{m+y}{m}p\Big) + y \ln\Big(\frac{m+y}{y}q\Big)$$

und $y = \frac{mq}{p}(1-px)$. Führen Sie die in der Vorlesung fehlende Abschätzung $g_m(y) \leq -\frac{p^2 q}{3} m x^2$ auf einem ebenfalls zu identifizierenden Intervall $x \in [0,\varepsilon)$ durch.

Hinweis: Die Rechnung wird etwas stromlinienförmiger, wenn Sie statt dem Logarithmus $(1+z)\ln(1+z)$ bis zur zweiten Ordnung entwickeln.