Perkolationstheorie

Übungsblatt 12

Christoph Schumacher, Ivan Veselić

Abgabe bis Mittwoch, 10. Februar 2021 per Email.

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)**.** Die Folgen $(a_n)_n$ und $(g_n)_n$ erfüllen

$$a_{m+n+2} \le a_m + a_n + g_n \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{n} = 0.$$

Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$

$$A := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in [-\infty, \infty) \quad \text{und} \quad a_k \ge (k+2)A - g_k.$$

Hinweis: Zerlegen Sie $n = (k+2)m + r$ mit $r \in \{0, \dots, k+1\}$.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)**.** Ziel dieser Aufgabe ist die Ungleichung

$$\mathrm{P}_p(\mathrm{diam}(C) = m+n+2) \ge \frac{p^2(1-p)^{2d-4}}{d^2(2n+1)^d} \mathrm{P}_p(\mathrm{diam}(C) = m)\, \mathrm{P}_p(\mathrm{diam}(C) = n)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Die Idee ist, einen Cluster mit Durchmesser m mit einem Cluster mit Durchmesser n zusammenzufügen. Wie in der Vorlesung seien zu einem Gittertierchen $A = (V(A), E(A))$

$$L_j(A) := \min_{x \in V(A)} x_j, \quad R_j(A) := \max_{x \in V(A)} x_j,$$

$$D_j(A) := L_j(A) - R_j(A), \quad \mathrm{diam}(A) := \max_{j=1}^{d} D_j(A).$$

Wir brauchen weiter $\mathrm{Min}(A) := (x_1, \dots, x_d)$ und $\mathrm{Max}(A) := (y_1, \dots, y_d)$ mit

$$x_j := \min_{(x_1,\dots,x_{j-1},z_j,\dots,z_d)\in V(A)} z_j, \quad y_j := \max_{(y_1,\dots,y_{j-1},z_j,\dots,z_d)\in V(A)} z_j, \quad j \in \{1,\dots,d\}.$$

Wir setzen zwei Gittertierchen A und A' mit $\mathrm{Min}(A') = 0$ zu $A \oplus A' := (V(A \oplus A'), E(A \oplus A'))$ zusammen, wobei

$$\begin{aligned}
V(A \oplus A') &:= V(A) \cup (V(A') + \mathrm{Max}(A) + 2e_1) \cup \{\mathrm{Max}(A) + e_1\} \\
E(A \oplus A') &:= E(A) \cup (E(A') + \mathrm{Max}(A) + 2e_1) \cup \\
&\qquad \cup \big\{\{\mathrm{Max}(A), \mathrm{Max}(A) + e_1\}, \{\mathrm{Max}(A) + e_1, \mathrm{Max}(A) + 2e_1\}\big\}.
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie $\frac{1}{d}\mathrm{P}_p(\mathrm{diam}\, C = k) \le \mathrm{P}_p(D_1(C) = \mathrm{diam}\, C = k) \le \mathrm{P}_p(\mathrm{diam}\, C = k)$.

b) Beweisen Sie, dass es ein $x \in \Lambda_k$ gibt so dass

$$\mathrm{P}_p(D_1(C) = \mathrm{diam}\, C = k, \mathrm{Min}(C) = x) \ge |\Lambda_k|^{-1}\, \mathrm{P}_p(D_1(C) = \mathrm{diam}\, C = k).$$

c) Leiten Sie die gewünschte Ungleichung her.

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)**.** Für endliche Mengen $S \sqsubset \mathbb{Z}^d$ mit $0 \in S$ wurde in Definition 10.2

$$\phi_p(S) := p \sum_{\{x,y\}\in\partial_E S} \mathrm{P}_p(0 \overset{S}{\longleftrightarrow} x) = \mathrm{E}\Big[\sum\nolimits_{\{x,y\}\in\partial_E S} \mathbf{1}_{\{0 \overset{S}{\longleftrightarrow} x, \omega_{\{x,y\}}=1\}}\Big]$$

mit dem Kantenrand $\partial_E S$ definiert.

a) Begründen Sie

$$\{p \in [0,1] \mid \exists S \sqsubset \mathbb{Z}^d, 0 \in S \colon \phi_p(S) < 1\} = [0, p_c).$$

b) Folgern Sie $\mathrm{E}_{p_c}[|C|] = \infty$.

c) Beweisen Sie nun, dass $\mathrm{P}_{p_c}(|C| \ge n)$ nicht exponentiell in n abfällt.

d) Zeigen Sie auch, dass $\mathrm{P}_{p_c}(\mathrm{diam}\, C = n)$ nicht exponentiell in n abfällt.