Mögliche Themen aus der Analysis fürs Seminar

Die meisten Themen sind von einander unabhängig, eine Ausnahme sind die ersten drei Themen, die aufeinander aufbauen.

1. **Ableitungssätze für Funktionen**
   In der Analysis haben wir schon die zentrale Bedeutung von Ableitungen und deren Beziehung zu Integralen kennengelernt. In der Tat kann man viele von diesen Sachverhalte verallgemeinern und abstrakter untersuchen. Dies führt z.B. auf den Überdeckungssatz von Vitali und den Lebesgueschen Differentiationssatz.

   Basierend auf dem Buch [NNT] **"Real Analysis"** von Bruckner, Bruckner und Thomson,
   http://classicalrealanalysis.info/com/BBT-TableOfContents.php
   würde sich ein **erster Vortrag** dem Überdeckungssatz von Vitali und den Lebesgueschen Differentiationssatz und eventuell den Satz von Banach–Zarecki befassen. (§§ 7.1 bis 7.3 in dem Buch [NNT]) (Hier gehen auch Lebesgue–Stieltjes-Maße ein.)

   Darauf aufbauenden widmet sich ein **zweiter Vortrag** der Frage „Wie hängen Ableitung und Integral zusammen?“ also einer Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Integral und Differentialrechnung. Dies würde auf §§7.4 bis 7.6 aus dem Buch [NNT] basieren.

3. **Ableitungssätze für Maße**
   Aufbauend auf dem ersten Thema kann man nun die Ableitungseigenschaften von Maßen untersuchen. Themen wären die Differenzierbarkeit von Lebesgue–Stieltjes-Maßen und der Satz von Radon Nikodym, dem Anfang von Kapitel 8 in dem Buch [NNT] folgend.

4. **Rearrangement Inequalities (eine Klasse von Integralungleichungen)**
   Ist ein Thema **der Maß und Integrationstheorie,** und wird z.B. im Kapitel 3 des Buches "Analysis" von Lieb und Loss schön dargestellt.

   Es eignet sich für Studierende mit Vorliebe zur Integrationstheorie und einem Grundwissen zu L^p-Räumen.

5. **Stetige und differenzierbare Abhängigkeit von Lösungen von gewöhnlich Dgl. von den Daten,**
   z.B. basierend auf Kapitel 4 aus dem Buch "Gewöhnliche Dgl." von Prüss und Wilke

   Dieses Thema ist für Studierende geeignet, die bereits im Analysis Kurs gDGls behandelt haben, diese Wissen beherrschen und darauf aufbauend etwas lernen und präsentieren wollen.

6. **Ergodensätze**
   individuelle Ergodensatz (Ergodensatz von Birkhoff oder punktweiser Ergodensatz)
   Hopfsches Maximal-Ergodenlemma
   L^p-Ergodensatz

   Dieses Thema verbindet Integrations- und Maßtheorie mit Wahrscheinlichkeitstheorie und der Theorie stochastischer Prozesse sowie der Theorie dynamischer Systeme. Man kann Ergodensätze als Cousins des Gesetzes der großen Zahlen auffassen.

Literatur:
elementar: Achim Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie, 2013 Springer, 978-3-642-36018-3
anspruchsvoll: Ulrich Krengel: Ergodic Theorems 1985 De Gruyter, 978-3-11-008478-8

7. **Amenabilität/Mittelbarkeit**
Gibt es ein links-invariantes Mittel auf einer Gruppe?
Auch hier gibt es eine Verbindung zum Gesetz der großen Zahlen, das Thema ist jedoch um einiges abstrakter. Voraussetzung ist die Vorlesung Funktionalanalysis und einige Begriffe aus der Gruppentheorie/Banachalgebren fließen ebenfalls ein.

Literatur:
Tao, Terry: https://terrytao.wordpress.com/2009/04/14/some-notes-on-amenability/
anspruchsvoll:
Runde, Volker: Lectures on amenability. Lecture Notes in Mathematics. 1774, Springer
Paterson, Alan: Amenability. (Mathematical Surveys and Monographs, 29. (AMS)

8. **Basics der Perkolationstheorie**
Perkolation ist ein mehrdimensionaler stochastischer Prozess, der typischerweise auf dem Euklidischen Gitter Z^d definiert wird, aber auch auf allgemeineren geometrischen Strukturen. Dadurch entstehen zufällige Graphen, die in zusammenhängende Komponenten, genannt Cluster, zerfallen. Nun werden stochastisch-geometrische Eigenschaften dieser Cluster werden untersucht: Gibt es unendliche große Cluster? Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie auf? Wie viele davon gibt es typischerweise? Was ist das durchschnittliche Volumen, die durchschnittliche Oberfläche eines Clusters? Wie stark hängen diese Eigenschaften von der Dimension oder anderen geometrischen Kennzahlen des zugrundeliegenden (deterministische) Graphen ab?

Literatur:
Achim Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie, 2013 Springer, 978-3-642-36018-3
Vincent Tassion: Percolation Theory, ETH Zurich, Autumn 2020, Vorlesungsskript
https://metaphor.ethz.ch/x/2020/hs/401-4607-59L/