

# Indefinite Probleme bei der Anderson-Lokalisierung

Dissertation

zur Erlangung des Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
der Fakultät für Mathematik  
an der Ruhr-Universität-Bochum

von

**Ivan Veselić**

Bochum 2001

Abgabe der Dissertation 29. Januar 2001  
Tag der Mündlichen Prüfung 2. März 2001

Vorsitzender  
des Prüfungsausschusses (Dekan): Professor Dr. R. Verfürth  
Erstgutachter: Professor Dr. W. Kirsch  
Zweitgutachter: Professor Dr. H. Dette  
Drittgutachter: Professor Dr. V. Enß,  
Rheinisch Westfälische Technische Hochschule  
Aachen

# Zusammenfassung

Für periodische Schrödinger-Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$  mit einem Anderson-artigen zufälligen Störpotential wird an inneren spektralen Kanten Lokalisierung bewiesen, d.h. die Existenz von reinem Punktspektrum. Erstmals kann dabei auf ein spezielles Abfallverhalten der Dichte der Kopplungskonstanten nahe ihrer Extremalwerte verzichtet werden. Diese Voraussetzung bei früheren Resultaten ist technischer Art und ohne physikalische Motivation.

Die betrachteten spektralen Kanten des ungestörten, periodischen Operators müssen Floquet-regulär sein. Dies ist eine generische Eigenschaft von periodischen Schrödinger-Operatoren und von Physikern allgemein angenommen.

Desweiteren untersuchen wir die spektralen Eigenschaften von Modellen von Anderson-Typ mit Einzelplatzpotentialen, die das Vorzeichen wechseln. Unter gewissen weiteren Annahmen an das Potential beweisen wir die Existenz der Zustandsdichte und ein Resultat zur Lokalisierung.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung</b>	<b>3</b>
<b>0 Überblick</b>	<b>7</b>
<b>1 Zufällige Schrödinger-Operatoren</b>	<b>9</b>
1.1 Physikalischer Hintergrund . . . . .	9
1.2 Das Legierungs-Modell . . . . .	11
1.3 Mathematische Grundlagen . . . . .	12
1.3.1 Einführung und Notation . . . . .	12
1.3.2 Selbstadjungierte Operatoren auf $L^2$ . . . . .	14
1.3.3 Randbedingungen . . . . .	16
1.3.4 Selbstmittelnde Größen . . . . .	17
<b>2 Resultate zur Lokalisierung</b>	<b>21</b>
2.1 Neue Resultate . . . . .	21
2.2 Allgemeine Theoreme . . . . .	30
2.3 Bisherige Resultate zur Lokalisierung . . . . .	40
<b>3 Lokalisierung an spektralen Kanten</b>	<b>43</b>
3.1 Lifschitz-Tails . . . . .	44
3.2 Darlegung der Problematik . . . . .	44
3.3 Floquet-Theorie . . . . .	48
3.4 Funktionalkalkül mit fast analytischen Funktionen . . . . .	51
3.5 Approximierte charakteristische Funktion mit minimaler Ableitung . . . . .	53
3.6 Approximations-Lemma für die integrierte Zustandsdichte . . . . .	56
3.7 Eigenwerte nahe der spektralen Kante sind selten . . . . .	67
<b>4 Wegner-Abschätzung für indefinite Potentiale</b>	<b>71</b>
4.1 Darlegung der Problematik . . . . .	71

4.2	Vorbereitende Abschätzungen . . . . .	79
4.3	Spektrale Mittelung . . . . .	82
4.4	Transformation der Zufallsvariablen . . . . .	84
4.5	Abschätzung der Dichte . . . . .	86
4.5.1	Differenzierbare Dichten . . . . .	88
4.5.2	Grenzfälle . . . . .	90
4.5.3	Gleichverteilung . . . . .	92
4.5.4	Berechnung des Volumens eines verallgemeinerten Parallelepipeds . . . . .	100
4.6	Stetigkeit der integrierten Zustandsdichte . . . . .	103
4.6.1	Legierungs-Modell . . . . .	104
4.6.2	Anderson-Modell . . . . .	105
4.6.3	Korrelierte Kopplungskonstanten . . . . .	105
4.6.4	Thermodynamischer Limes . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Lokalisierung für Potentiale mit kleinem negativem Anteil</b>	<b>109</b>
5.1	Lokalisierung am Infimum des Spektrums . . . . .	109
5.2	Lokalisierung an inneren Spektralkanten . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Diskussion der Resultate und Ausblick</b>	<b>121</b>
6.1	Naheliegende Verallgemeinerungen . . . . .	121
6.2	Übertragung der Methoden auf ähnliche Fragestellungen . . . . .	123
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>
	<b>Symbol- und Stichwortverzeichnis</b>	<b>135</b>

# Kapitel 0

## Überblick

Die *Anderson-Lokalisierung*, auch *exponentielle Lokalisierung* genannt, ist seit mehreren Jahrzehnten ein reges Forschungsgebiet, sowohl der Physik als auch der Mathematik. Ziel ist es dabei zu untersuchen, ob ein zufälliger Schrödinger-Operator in gewissen Energiebereichen reines Punktspektrum aufweist. Während grundlegende Techniken zu Verfügung stehen, mit denen man Lokalisierungs-Aussagen auch mathematisch rigoros beweisen kann, ist ihre Anwendung an spezielle technische Voraussetzungen geknüpft.

Wir beschäftigen uns mit dem am besten untersuchten Modell, dem Schrödinger-Operator mit Legierungs-Potential. Selbst bei diesem ist jedoch der Lokalisierungs-Beweis von einer Vielzahl von Annahmen abhängig. So ist bisher das Spektrum des Operators nur in einer Umgebung seines unteren Randes eingehend untersucht worden. Desweiteren setzen fast alle Arbeiten ein festes, meist positives, Vorzeichen des Legierungs-Potentials voraus. Gemeinsam ist diesen Voraussetzungen, daß sie eine Vereinfachung der störungstheoretischen Methoden zur Folge haben, die man bei der Untersuchung des Schrödinger-Operators einsetzt. Durch die Annahmen ist die Positivität — bzw. monotone Abhängigkeit vom Parameter — gewisser Hilfs-Operatoren gewährleistet.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Lokalisierungs-Problem in Situationen, wo bei der störungstheoretischen Untersuchung der zufälligen Operatoren indefinite Probleme auftauchen. Dies ist zum einen der Fall, falls das Legierungs-Potential — genauer: die Einzelplatz-Potentiale, aus denen es zusammengesetzt ist — positive und negative Werte annimmt. Zum anderen trifft man bei der Analyse von spektralen Eigenschaften von Energiebereichen in der Nähe einer inneren spektralen Lücke auf ähnliche indefinite Problemstellungen.

Der Aufbau der Arbeit ist wie folgt: im ersten Kapitel erfolgt eine Einführung in die physikalischen und mathematischen Aspekte von zufälligen Schrödinger-Operatoren. Literaturhinweise, die die benötigten mathematischen Vorkennt-

nisse betreffen, findet man zu Anfang von Abschnitt 1.3.1.

In Kapitel 2 formulieren wir die neuen Ergebnisse dieser Arbeit und stellen sie in Zusammenhang mit abstrakten Lokalisierungs-Theoremen, mit der Multiskalen-Analyse und mit früheren Resultaten bei ähnlichen Modellen. Speziell in Abschnitt 2.3 findet man einen (unvollständigen) Überblick über die mathematischen Ergebnisse zur Anderson-Lokalisierung.

Die Kapitel 3 bis 5 bilden das Herzstück der Arbeit. Sie enthalten die Beweise der in Abschnitt 2.1 vorgestellten Resultate. Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Lokalisierungs-Problem an inneren, Floquet-regulären spektralen Kanten. In Kapitel 4 wird ein Wegner-Lemma für Legierungs-Modelle mit indefiniten Einzelplatz-Potentialen bewiesen. Kapitel 5 zeigt, daß aus den Ergebnissen des vorhergehende Kapitels unter gewissen Annahmen exponentielle Lokalisierung folgt.

Zu Anfang jedes Kapitels erfolgt eine Darstellung der Ideen und verwendeten Techniken, sowie eventuell ein Vergleich mit den Methoden anderer Autoren.

In Kapitel 6 werden mögliche Verallgemeinerungen der Resultate angesprochen. Wir erwähnen andere Modelle, bei denen die hier entwickelte Sichtweise zwar keine Beweise, aber zumindest Lösungsansätze liefert.



# Kapitel 1

## Zufällige Schrödinger-Operatoren

### 1.1 Physikalischer Hintergrund

Die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Schrödinger-Operatoren entstammen der quantenmechanischen Theorie der Festkörper. Sie beschreiben die Bewegung von Elektronen in einem (ungeordneten) Medium.

Um zu einem mathematisch handhabbaren Modell zu kommen, müssen wir einige — physikalisch rechtfertigbare — Näherungen vornehmen.

Wir wollen die Bewegung von Elektronen in einem Festkörper untersuchen. Da die Atomkerne um einige Größenordnungen größere Massen haben, kann man gemäß der Born-Oppenheimer- oder adiabatischen Näherung annehmen, daß auf der für die Elektronenbewegung relevanten Zeitskala die Kerne ruhen. Der resultierende Schrödinger-Operator ist die Summe der kinetischen Energie der Elektronen, ihrer Wechselwirkung untereinander und des äußeren Potentials, welches von den statischen Kernen herrührt. Wegen seines Ursprungs aus dem Korrespondenzprinzip nennen wir ihn auch (quantenmechanischer) Hamilton-Operator. Die Wechselwirkung der Elektronen koppelt die Bewegungsgleichungen der einzelnen Elektronen aneinander. Wegen ihrer großen Anzahl — die Anzahl der Atome in einem makroskopischen Festkörper ist von der Größenordnung  $10^{23}$  — ist dieses Gleichungssystem mathematisch nicht zugänglich, zumindest wenn man das dynamische Verhalten der Elektronen untersuchen will. Deshalb vernachlässigen wir die Wechselwirkung der Elektronen untereinander und ersetzen sie durch ein mittleres äußeres Potential, welches ein einzelnes Elektron aufgrund der umgebenden Elektronenwolke spürt.

Durch diese Approximation werden die Bewegungsgleichungen entkoppelt und wir gelangen zu der sogenannten *Ein-Elektron-Näherung*.

Da wir uns nicht für spezielle Oberflächeneffekte, sondern für die Transporteigenschaften des Bulk-Festkörpers von makroskopischen Ausmaßen interessieren, nehmen wir den Konfigurationsraum als unbeschränkt an. Anders gesagt, das Elektron kann sich im gesamten Raum aufhalten und ist in seiner Bewegung nicht *a priori* auf eine Teilmenge beschränkt. Dadurch gelangen wir zu einem Operator, dessen spektrale Eigenschaften in einer qualitativen Weise die Transporteigenschaften des betrachteten Materials beschreiben.<sup>1</sup>

Der entsprechende Schrödinger-Operator setzt sich aus dem negativen Laplace-Operator, welcher der kinetischen Energie entspricht, und dem Potential zusammen. Wir nehmen an, daß der letztere Term aus einem periodischen und einem zufälligen Anteil besteht. Ein periodisches Potential entspricht einem idealen Kristall. Der entsprechende quantenmechanische Hamilton-Operator besitzt rein absolutstetiges Spektrum, welches in Bändern angeordnet ist. Dies bedeutet, daß sich Elektronen mit Energien aus einem dieser Bänder durch das periodische Medium ausbreiten können und weist auf eine gute elektrische und thermale Leitfähigkeit des betrachteten Materials hin.

In der Realität weisen Materialien keine perfekte kristalline Struktur auf; Versetzungen des Gitters oder Unreinheiten machen das Material ungeordnet. Daher muß man bei der Untersuchung des Schrödinger-Operators die zufällige Störung einbeziehen. Zudem werden „reine“ Materialien in industriellen Verfahren mit Fremdatomen dotiert, um ihre Leitungsfähigkeit zu ändern. Um diese Änderung zu verstehen, gilt es die unterschiedliche Dynamik zu untersuchen, die von einem zufälligen Hamilton-Operator — im Gegensatz zu einem periodischen — erzeugt wird.

Die Theorie der ungeordneten Festkörper geht auf Untersuchungen von Anderson, Mott und Lifschitz aus den fünfziger und sechziger Jahren zurück, siehe z.B. den Artikel [And58] oder den Sammelband [Lif85]. Demnach weisen Elektronen in einem zufälligen System ein anderes dynamisches Verhalten auf als in dem periodischen Gegenstück. Bei Energien nahe der Ränder des Spektrums und bei genügend starker Unordnung sollte sich das Elektron in einem endlichen, makroskopisch kleinem Bereich aufhalten. Dieses Phänomen nennt man *Anderson-Lokalisierung*. Es ist ein wesentlich diffizileres Ergebnis als z.B. die Existenz von gebundenen Zuständen beim quantenmechanischen Harmonischen Oszillator, wo das Potential im Unendlichen gegen  $+\infty$  strebt. Bei ungeordneten Medien fluktuiert das Potential im gesamten Raum zwischen großen und kleinen Werten.

---

<sup>1</sup>So stellt das RAGE-Theorem [RS79] den Spektraltyp des Schrödinger-Operators in Zusammenhang mit den dynamischen Eigenschaften des entsprechenden quantenmechanischen Systems.

Einen Überblick über die Entwicklung des Forschungsgebiets vom Standpunkt der Physik kann man in [BBEE<sup>+</sup>84, ES84, LGP88] gewinnen.

## 1.2 Das Legierungs-Modell

Ein *Legierungs-Modell* ist der Schrödinger-Operator

$$\begin{aligned} H_\omega &:= H_0 + V_\omega \\ &:= -\Delta + V_0 + V_\omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

auf einer geeigneten Teilmenge des  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Dabei ist  $-\Delta$  der negative Laplace-Operator,  $V_0$  ein periodisches Potential mit der Eigenschaft

$$V_0(x + e_i) = V_0(x)$$

für alle Vektoren  $e_i, i = 1, \dots, d$  aus der Standard-Basis des  $\mathbb{R}^d$  und

$$V_\omega(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_k u(x - k) \tag{1.2}$$

ein *Legierungs-Potential*. Die  $\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d$  sind identisch verteilte Zufallsvariablen, die wir *Kopplungskonstanten* nennen. Wir nehmen durchweg an, daß diese Zufallsvariablen beschränkt sind und eine beschränkte Dichte  $f$  besitzen, obwohl auch in allgemeineren Fällen interessante Fragestellungen und mathematische Resultate existieren, vgl. z.B. [KM82c, Klo95c, HMLW00]. Falls man  $\mu(A) = \int_A f(x) dx$  setzt, kann man die Folge  $\omega := \{\omega_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  als Element des Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  auffassen. Hierbei ist

$$\Omega = [\text{supp } f]^{\mathbb{Z}^d}, \quad \mathbb{P} := \bigotimes_{\mathbb{Z}^d} \mu \tag{1.3}$$

und  $\mathcal{F}$  die  $\sigma$ -Algebra, die sich aus  $\bigotimes_{\mathbb{Z}^d} \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ergibt. Die Funktion  $u$  wird *Einzelplatz-Potential* genannt. Damit der Ausdruck (1.2) Sinn macht, sollte  $u$  im Unendlichen genügend schnell abfallen. Für unsere Zwecke genügt es, wenn wir lokal integrierbare  $u$  mit kompakten Träger oder mit exponentiellem Abfall im Unendlichen betrachten.

Der Name des Legierungs-Potentials erklärt sich folgendermaßen. Auf den Gitterpunkten von  $\mathbb{Z}^d$  sind Atome bzw. Atomrümpfe angeordnet. Alle erzeugen das gleiche Einzelplatz-Potential  $u$ , koppeln jedoch mit unterschiedlicher Stärke an das Elektron. Deshalb sind die einzelnen  $u(x - k)$  mit einem zufälligem Vorfaktor versehen, der z.B. für die Kernladungszahl der verschiedenen Atomarten im Gitter stehen kann.<sup>2</sup> Das periodische Potential trägt u.a. approximativ der

<sup>2</sup>Man könnte auch zulassen, daß die Kerne zufällig zu den Gitterpunkten verschoben sind. Dies führt zu dem *random displacement model* [Klo93, CH94, Zen99].

Wechselwirkung zwischen dem einzelnen Elektron, das wir betrachten, und der umgebenden Elektronenwolke Rechnung.

Wie bereits erwähnt ist bei einem periodischen Operator  $H_0$  das Spektrum in Bändern angeordnet. In vielen Fällen wird dies auch bei dem Spektrum  $\sigma(H_\omega)$  des Legierungs-Modells der Fall sein [KM82c]. Desweiteren kann man oft einen Randpunkt des Spektrums von  $H_\omega$  als Perturbation eines Randes von  $\sigma(H_0)$  identifizieren, vgl. [KM82c] und Abschnitt 2 von [KSS98b].

Während also das Spektrum als Menge beim periodischen Operator und beim Legierungs-Modell eine ähnliche Struktur aufweist, können sich dessen maßtheoretische Eigenschaften drastisch unterscheiden. Periodische Schrödinger-Operatoren weisen ein rein absolutstetiges Spektrum auf, während zufällige in einigen Energiebereichen reines Punktspektrum besitzen, wie dem Überblick in Abschnitt 2.3 zu entnehmen ist.

Häufig werden wir Eigenschaften antreffen, die allen Elementen der Familie  $\{V_\omega, \omega \in \Omega\}$  gemeinsam sind, und nur vom Einzelplatz-Potential und der Dichte der zufälligen Kopplungskonstanten abhängen. Das Paar  $(u, f) \in L^p(\mathbb{R}^d) \times L_0^\infty(\mathbb{R})$  beschreibt in diesem Fall sämtliche relevanten Eigenschaften von  $\{V_\omega, \omega \in \Omega\}$ .

Das diskrete Analogon des Legierungs-Modells heißt *Anderson-Modell*, agiert auf Folgen aus  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  und ist durch

$$h_\omega := h_0 + v_\omega \tag{1.4}$$

gegeben. Dabei ist  $h_0$  der *diskrete Laplace-Operator* oder *finite Differenzen-Operator zweiter Ordnung*

$$[h_0 f]_n = 2d f_n - \sum_{|m-n|=1} f_m \quad \text{für } f \in l^2(\mathbb{Z}^d), n \in \mathbb{Z}^d$$

und  $v_\omega$  der Multiplikations-Operator mit der zufälligen Folge  $\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d$ :

$$[v_\omega f]_n := \omega_n f_n.$$

Historisch gesehen ist dieses Modell viel früher untersucht worden als sein kontinuierliches Pendant auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$  [And58, FS83]. Falls wir sowohl das diskrete als auch das kontinuierliche Modell im Sinn haben, sprechen wir von *Anderson-artigen Modellen* oder von *Modellen vom Anderson-Typ*.

## 1.3 Mathematische Grundlagen

### 1.3.1 Einführung und Notation

In diesem Unterabschnitt stellen wir einige funktionalanalytische Resultate bereit und nutzen dies, um die Notation festzulegen. Dabei werden grundlegende

Kenntnisse der Funktionalanalysis vorausgesetzt. Eine systematische Darstellung dieses mathematischen Gebietes findet man in den Büchern von Werner [Wer95], Weidmann [Wei80] oder Reed und Simon [RS80]. Die Bücher sind hierbei der steigenden Komplexität nach aufgeführt. Der interessierte Leser wird bemerken, daß wir in der vorliegenden Arbeit oft auf die anderen Bände [RS75, RS78, RS79] von Reed und Simon zurückgreifen. Zusammen mit [Sim71, Sim79, Sim82, CFKS87] ist diese Reihe eine Darstellung der Theorie der Schrödinger-Operatoren, in der der Leser Themen und Resultate nachlesen kann, die aus Platzgründen in dieser Arbeit knapp gehalten sind.

Als Lehrbuchtexte speziell für zufällige Schrödinger-Operatoren seien [Kir89, CL90, PF92, Fis96, Sto] empfohlen. Die Arbeiten [Skr87, Kar97] widmen sich der Untersuchung von periodischen Schrödinger-Operatoren. Um die Verbindung zur Physik wiederherzustellen sei auf die Bände [GP90, GP91] verwiesen, die sich in den Themen an konkreten physikalischen Problemen und explizit lösbaren Aufgaben orientieren, aber an mathematischer Strenge Nichts zu wünschen übrig lassen.

Bei einem  $\mathbb{Z}^d$ -periodischen Potential enthalten die Funktionswerte auf einer Einheitszelle die Information über das gesamte Potential. Dies und die Technik der *Multiskalen-Analyse* erfordern eine abkürzende Notation für Würfel im  $\mathbb{R}^d$ . Wir bezeichnen:

$$\Lambda_L := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y\|_\infty < L/2\}, \quad L > 0 \quad (1.5)$$

und

$$\Lambda + x := \{y + x \mid y \in \Lambda\}. \quad (1.6)$$

Dabei fassen wir je nach Bedarf  $\Lambda$  als offene oder abgeschlossene Menge auf. So ist z.B. bei der Definition von Funktionenräumen  $C^\infty(\Lambda)$ ,  $W^{2,2}(\Lambda)$  usw. stets der Würfel ohne Rand gemeint. Die Menge der Gitterpunkte innerhalb von  $\Lambda$  bezeichnen wir mit  $\tilde{\Lambda}$ . Die charakteristische Funktion einer Menge  $M$  wird durch  $\chi_M$  dargestellt. Falls es sich bei  $M$  um einen Würfel handelt, benutzen wir eine abkürzende Notation. So steht

$$\chi^L(x) = \chi_{\Lambda_L}(x), \quad L > 0$$

für die charakteristische Funktion des Würfels mit Kantenlänge  $L$  und

$$\chi_k(x) = \chi(x - k), \quad k \in \mathbb{R}^d$$

für die Translation der charakteristischen Funktion des Einheitswürfels bei Null um den Vektor  $k$ . Dies sind generelle Konventionen. An den Stellen, wo Bedarf besteht, wird eine präzise Definition gegeben bzw. in Erinnerung gerufen. Mit

$[x]$  bezeichnen wir die Gauß-Klammer von  $x$ , mit  $2\mathbb{N}$  die Menge der geraden Zahlen und mit  $[x]_2$  die größte gerade Zahl, die kleiner oder gleich  $x$  ist.  $\text{Lin}\{a, b\}$  bezeichnet die Lineare Hülle der Vektoren  $a$  und  $b$ .

Für Ableitungen einer Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  benutzen wir die Schreibweise  $D_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$  und für höhere Ableitungen die Abkürzung  $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ . Dann schreibt sich der Laplace-Operator als  $\Delta = \sum_{i=1}^d D_i^2 = D^{(2, \dots, 2)}$  und der Gradient als  $\nabla = (D_1, \dots, D_d)$ . Falls die Funktion  $f$  nicht zweimal stetig differenzierbar ist, interpretieren wir die Ableitung im Distributionen-Sinne [Yos95]. Die meisten Operatoren, die wir betrachten, wirken auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Den Hilbertraum der komplexwertigen, quadratintegrierbaren Funktionen bezüglich des Lebesguemaßes bezeichnen wir mit  $L^2(X)$ , wobei  $X = \mathbb{R}^d$  oder eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  ist. Die Sobolevräume schreiben wir folgendermaßen

$$W^{k,p}(X) := \{f \in L^p(X) \mid D^\alpha f \in L^p(X), \forall \alpha \text{ mit } \sum_{i=1}^d \alpha_i \leq k\} \quad (1.7)$$

und die zugehörige Norm als  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(X)}$  oder  $\|\cdot\|_{k,p}$ , falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind.  $C^k$  bezeichnet den Raum der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen,  $C_0^\infty$  den Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger und  $C_\infty$  den Raum der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden.

Analog zu den  $L^p$ -Räumen definiert man die lokalen  $L^p$ -Räume. Eine Funktion ist Element aus  $L_{\text{loc}}^p$ , falls für jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^d$  das Integral  $\int_K |f(x)|^p dx$  endlich ist. Sei  $\Lambda$  ein Würfel. Falls es eine Konstante  $C$  gibt mit  $\int_\Lambda |f(x+y)|^p dx < C$  für alle  $y \in \mathbb{R}^d$ , ist  $f$  gleichmäßig lokal  $L^p$ -integrierbar und man schreibt  $f \in L_{\text{loc,unif}}^p$ .

### 1.3.2 Selbstadjungierte Operatoren auf $L^2$

Damit ein linearer Operator auf einem Hilbertraum eine quantenmechanische Observable darstellen kann, muß er selbstadjungiert sein. Dadurch ist einerseits gewährleistet, daß sein Spektrum — und damit die möglichen Meßwerte der Observablen — reell ist. Andererseits ist dann auch die vom Operator erzeugte Evolutionsgruppe unitär, welches dem quantenmechanischen Axiom der Teilchenerhaltung entspricht. Der Laplace-Operator  $\Delta$  auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$  ist mit dem Sobolev-(Hilbert)raum  $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$  als Definitionsbereich selbstadjungiert. Von Kato eingeführte störungstheoretische Betrachtungen erlauben es, dieses Resultat auf den Fall auszudehnen, wo zu der kinetischen Energie  $-\Delta$  ein Potential  $V$  addiert wird.

Die Vektornorm von  $\phi$  in einem Hilbertraum bezeichnen wir mit  $\|\phi\|$ . Für die Operatornorm benutzen wir dasselbe Symbol. In Zusammenhängen, in den wir

besonders betonen wollen, daß es sich um die *Operatornorm* handelt, schreiben wir  $\| \cdot \|$ .

**Theorem 1.3.1 (Kato-Rellich Theorem)**

Sei  $A$  selbstadjungiert auf  $D(A) \subset \mathcal{H}$  und  $B$  symmetrisch auf  $D(B) \supset D(A)$ . Falls  $a < 1$  und  $b < \infty$  existieren mit

$$\|Bf\| \leq a\|Af\| + b\|f\| \quad \forall f \in D(A) \quad (1.8)$$

dann ist  $A + B$  selbstadjungiert auf  $D(A)$ .

**Definition 1.3.2**

Einen Operator  $B$  der (1.8) erfüllt — und damit implizit auch  $D(B) \supset D(A)$  — nennt man  $A$ -beschränkt mit relativer Schranke  $a$ . Kann sogar  $a > 0$  beliebig klein gewählt werden, heißt  $B$  infinitesimal beschränkt bezüglich  $A$  oder  $A$ -infinitesimal beschränkt. Dies bedeutet nicht, daß  $a = 0$  gewählt werden kann, denn für  $a \rightarrow 0$  könnte  $b = b(a)$  divergieren.

Falls  $B$  und  $C$  infinitesimale Störungen von  $A$  sind, dann ist auch  $C$  eine infinitesimale Störung von  $A + B$ . Der Satz von Kato-Rellich erlangt für Schrödinger-Operatoren seine volle Bedeutung, wenn man einfache Kriterien hat, wann ein Multiplikations-Operator  $V$  relativ  $\Delta$ -beschränkt ist. Für unsere Zwecke wird folgender Satz ausreichen [RS78].

**Satz 1.3.3**

Sei  $d$  die Raumdimension. Sei  $p = 2$  für  $d \leq 3$ ,  $p > \frac{d}{2}$  für  $d \geq 4$  und  $V \in L^p_{\text{loc,unif}}(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist  $V$  als Multiplikations-Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$  infinitesimal  $\Delta$ -beschränkt.

Die dimensionsabhängige Wahl des Exponenten in  $L^p$  wird häufiger vorkommen, deshalb wählen wir folgende Konvention. Die Schreibweise  $p = p(d)$  bedeutet, daß  $p$  eine Funktion von  $d$  ist, welche die Ungleichung

$$p(d) \begin{cases} \geq 2 & \text{falls } d \leq 3, \\ > d/2 & \text{falls } d \geq 4, \end{cases} \quad (1.9)$$

erfüllt.

Uns interessiert, unter welchen Voraussetzungen an das Einzelplatz-Potential  $u$  und die Kopplungskonstanten  $\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d$  Satz 1.3.1 auf das Legierungspotential angewandt werden kann. Für  $u \in L^p_{\text{loc}}$  mit  $p = p(d)$ , welches kompakten Träger besitzt oder im  $L^p$ -Sinne exponentiell abfällt im Unendlichen, und beschränkte Kopplungskonstanten  $|\omega_k| \leq M, \forall k \in \mathbb{Z}^d$ , rechnet man  $V_\omega \in L^p_{\text{loc,unif}}(\mathbb{R}^d)$  leicht nach. Insbesondere stellt man fest, daß die relative  $\Delta$ -Schranke unabhängig von  $\omega$  gewählt werden kann.

Weitere Untersuchungen zur Selbstadjungiertheit von Legierungs-Modellen findet man in [Kir81, KM83b].

### 1.3.3 Randbedingungen

Falls man einen Schrödinger-Operator auf einen offenen Würfel  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  einschränkt, sind Randbedingungen notwendig, um einen selbstadjungierten Operator zu definieren. D.h. ein und derselbe Differentialausdruck kann verschiedenen selbstadjungierten Operatoren entsprechen, je nachdem, mit welchem Definitionsbereich man ihn versieht. Den Laplace-Operator  $\Delta^{\Lambda, D}$  mit Dirichlet-Randbedingungen bekommt man, indem man  $C_0^\infty(\Lambda)$  in der Sobolev -Norm von  $W^{2,2}(\Lambda)$  abschließt und

$$D(\Delta^{\Lambda, D}) := \overline{C_0^\infty(\Lambda)}^{W^{2,2}}$$

als Definitionsbereich von  $\Delta^{\Lambda, D}$  wählt. Sei

$$\mathcal{C}^N = \{f \in C^\infty(\Lambda) \mid \partial_n f = 0 \text{ auf dem Rand von } \Lambda, \text{ bis auf die Kanten } \},$$

wobei  $\partial_n$  die Normalenableitung auf dem Rand bezeichnet. Dann definieren wir den Neumann-Laplace-Operator  $\Delta^{\Lambda, N}$  mit dem Definitionsbereich

$$D(\Delta^{\Lambda, N}) := \overline{\mathcal{C}^N(\Lambda)}^{W^{2,2}}.$$

Sei  $L$  die Kantenlänge des Würfels  $\Lambda$ ,  $T_{Le_i} f(x) = f(x - Le_i)$  die Translation um  $L$  in die  $i$ -te Koordinatenrichtung und

$$\mathcal{C}^{\text{per}} = \{f|_\Lambda \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^d), T_{Le_i} f = f, \forall i = 1, \dots, d\}.$$

Den Laplace-Operator mit periodischen Randbedingungen versieht man mit dem Definitionsbereich

$$D(\Delta^{\Lambda, \text{per}}) := \overline{W_{\text{per}}^{2,2}} := \overline{\mathcal{C}^{\text{per}}(\Lambda)}^{W^{2,2}}.$$

Eleganter kann man die Randbedingungen mit Hilfe von quadratischen Formen definieren, siehe den Anhang von [Sto]. In Abschnitt XIII.15 von [RS78] werden diese beiden Möglichkeiten der Definition von Randbedingungen miteinander verglichen. Simon legt in dem Buch [Sim71] die Theorie der Schrödinger-Operatoren im Sinne der quadratischen Formen dar.

Alle drei vorgestellten Typen von Randbedingungen machen den Laplace  $\Delta^{\Lambda, \bullet}$ , ( $\bullet = D, N$  oder  $\text{per}$ ) zu einem selbstadjungierten Operator. Falls man einen zusätzlichen Potentialterm betrachtet, kann man die Sätze 1.3.1 und 1.3.3 anwenden, um zu zeigen, daß der resultierende Schrödingeroperator selbstadjungiert ist. Die relative  $\Delta$ -Schranke der Legierungs-Potentiale ist unabhängig



von der Art der Randbedingungen, von der Konfiguration  $\omega \in \Omega$  der Kopplungskonstanten und von der Kantenlänge  $L \in \mathbb{N}$  des Würfels, auf den man den Laplace-Operator betrachtet. Die Einschränkung eines Schrödinger-Operators  $H = -\Delta + V$  auf einen Würfel  $\Lambda_L$  bezeichnen wir mit  $H^{L,\bullet}$ , wobei  $\bullet \in \{D, N, \text{per}\}$  für Dirichlet-, Neumann- oder periodische Randbedingungen steht.

Die oben betrachteten selbstadjungierten Operatoren auf  $\Lambda$  haben eine kompakte Resolvente und demnach diskretes Spektrum ohne Häufungspunkte im Endlichen.

Aus der Definition der Randbedingungen im Formensinne ergeben sich die Ungleichungen

$$-\Delta^{\Lambda,N} \leq -\Delta^{\Lambda,\text{per}} \leq -\Delta^{\Lambda,D}$$

und daraus nach dem Min-Max-Prinzip (XIII.1 in [RS78]) die Anordnung der Eigenwerte

$$E_n(-\Delta^{\Lambda,N}) \leq E_n(-\Delta^{\Lambda,\text{per}}) \leq E_n(-\Delta^{\Lambda,D}), \quad n \in \mathbb{N}$$

unter Beachtung der Vielfachheit.

Den diskreten Laplace- oder Schrödinger-Operator kann man ebenfalls auf eine Teilmenge seines ursprünglichen Konfigurationsraums  $\mathbb{Z}^d$  einschränken. Sei  $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cap \mathbb{Z}^d$ . Die Einschränkung von  $h_0 = -\Delta_{\text{disc}}$  auf  $l^2(\tilde{\Lambda})$  ist gegeben durch

$$[h_0^{\tilde{\Lambda}} f]_n = 2d f_n - \sum_{m \in \tilde{\Lambda}, |m-n|=1} f_m \quad \text{für } f \in l^2(\tilde{\Lambda}), n \in \tilde{\Lambda}.$$

Weitere Informationen über Randbedingungen bei Operatoren auf  $l^2(\tilde{\Lambda})$  findet man in [Sim87].

### 1.3.4 Selbstmittelnde Größen

Die mathematische Rechtfertigung, eine zufällige Familie von Schrödinger-Operatoren als ein einheitliches Objekt zu untersuchen, und nicht jedes Mitglied einzeln, ist das Phänomen der *Selbstmittelung*. So bezeichnet man die Tatsache, daß gewisse Größen, wie z.B. das Spektrum, fast allen Operatoren aus der Familie gemeinsam ist. Daß auf einer Menge vom Maß Null Ausnahmen auftreten können, entspricht der Natur der wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweise und dem physikalischen Standpunkt, daß Konfigurationen des Systems, welche Nullmengen entsprechen, in der Natur nicht vorkommen.

Dies hat zur Folge, daß man für ein konkretes Element aus der Familie das Spektrum nicht ohne weiteres angeben kann, obwohl man es für die Familie fast sicher kennt. Dies kann man am Beispiel der periodischen Operatoren erläutern, welche besonders „einfache“ Repräsentanten einer Familie von

Schrödinger-Operatoren vom Anderson-Typ sind. Diese besitzen allerdings spezielle Symmetrien, welche sie von den anderen Operatoren unterscheiden. Sie bilden eine Nullmenge und können ein anderes Spektrum als die anderen Mitglieder der Operatorfamilie haben, sowohl als Menge als auch von der Stetigkeit des Maßes her.

Unter unseren Voraussetzungen an das Legierungs- (1.1) und Anderson-Modell (1.4) besagen Resultate aus der allgemeinen Theorie der zufälligen Schrödinger-Operatoren, daß eine Teilmenge  $\Sigma$  der reellen Zahlen existiert mit

$$\sigma(H_\omega) = \Sigma \text{ für fast alle } \omega \in \Omega.$$

In demselben Sinne sind das diskrete  $\sigma_{disc}(H_\omega)$ , wesentliche  $\sigma_{ess}(H_\omega)$ , stetige  $\sigma_c(H_\omega)$ , singuläre  $\sigma_s(H_\omega)$ , absolutstetige  $\sigma_{ac}(H_\omega)$ , singulärstetige  $\sigma_{sc}(H_\omega)$  und das reine Punktspektrum  $\sigma_{pp}(H_\omega)$  Mengen, die fast sicher vom Zufall  $\omega \in \Omega$  unabhängig sind. Die Beweise findet man in den Originalarbeiten [Pas80, KS80, KM82b, KM82c] oder den Monographien [CL90, PF92].

Falls wir von dem Spektrum der Operatorfamilie  $H_\omega$  sprechen, meinen wir immer die Menge  $\Sigma \subset \mathbb{R}$  mit der  $\sigma(H_\omega)$  fast sicher übereinstimmt. Die Definition der einzelnen Spektralarten findet man in Funktionalanalysis-Büchern [Wer95, Wei80, RS80]. Die Resolventenmenge  $\mathbb{R} \setminus \sigma(H)$  bezeichnen wir mit  $\rho(H)$ .

Wir gehen nicht auf Aussagen über die Meßbarkeit und Ergodizität der zufälligen Schrödinger-Operatoren ein. Diese bilden die Grundlage für sämtliche Aussagen über die Selbstmittelungs-Eigenschaften von Operatorfamilien. Der interessierte Leser findet diesbezügliche Informationen in §6 der Dissertation [Kir81] und in den Lehrbuchtexten [Kir89, CL90]

Ein weiteres Beispiel für eine selbstmittelnde Größe ist die *integrierte Zustandsdichte*. Auf einem endlichen Würfel  $\Lambda_L$  definiert man sie durch

$$\begin{aligned} N_\omega^{L,D}(E) &:= \frac{1}{|\Lambda_L|} \#\{i \mid E_i(H_\omega^{L,D}) < E\} \\ &= \frac{1}{|\Lambda_L|} \text{Tr} P_\omega^{L,D}(\cdot - \infty, E]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

$E_i(H_\omega^{L,D})$  bezeichnet den  $i$ -ten Dirichlet-Eigenwert von  $H_\omega^{L,D}$ . Die Eigenwerte sind in aufsteigender Reihenfolge inklusive der Vielfachheiten numeriert.  $P_\omega^{L,D}(\cdot - \infty, E]$  ist der Spektralprojektor auf das Energieintervall  $\cdot - \infty, E]$  und  $|\cdot|$  das Lebesguemaß im  $\mathbb{R}^d$ . Für das Legierungs- und Anderson-Modell existiert der *thermodynamische Limes*

$$N(E) := \lim_{L \rightarrow \infty} N_\omega^{L,D}(E) \quad (1.11)$$

für fast alle  $\omega \in \Omega$  und ist von  $\omega$  unabhängig. Die Konstruktion der integrierten Zustandsdichte auf dem endlichen Würfel mit Neumann Randbedingungen

$N_\omega^{L,N}$  liefert dieselbe Funktion  $N$  im Limes  $L \rightarrow \infty$ , siehe [KM82a]. Überdies kann man in diesem Fall die integrierte Zustandsdichte auf ganz  $\mathbb{R}^d$  als Infimum schreiben:

$$N(E) = \inf_{L \in \mathbb{N}} N_\omega^{L,N}(E) \quad \text{für fast alle } \omega \in \Omega. \quad (1.12)$$

Dagegen gilt für  $N_\omega^{L,D}$  mit Dirichlet-Randbedingungen

$$N(E) = \sup_{L \in \mathbb{N}} N_\omega^{L,D}(E) \quad \text{für fast alle } \omega \in \Omega. \quad (1.13)$$

Nicht alle spektralen Größen sind selbstmittelnd. So hängen z.B. die Eigenwerte und Eigenfunktionen hochgradig vom Zufall ab [CL90]. Man beachte, daß  $\sigma_{pp}$  der *Abschluß* der Menge der Eigenwerte ist.

Nachdem feststeht, daß das Spektrum und die integrierte Zustandsdichte nicht vom Zufall abhängen, d.h. Charakteristiken der *gesamten* Familie  $\{H_\omega, \omega \in \Omega\}$  sind, möchte man weitere Details über sie wissen:

1. Kann man in gewissen Energiebereichen den Spektraltyp von  $\sigma(H_\omega)$  bestimmen?
2. Was weiß man über die Regularität der integrierten Zustandsdichte, spezieller: ist  $N(\cdot)$  Lipschitz-stetig? In diesem Fall existiert nämlich fast überall ihre Ableitung, welche man *Zustandsdichte* nennt.
3. Kann man etwas über die Asymptotik der integrierten Zustandsdichte sagen? Besonders interessant ist das Verhalten von  $N$  in der Nähe der Bandkanten, d.h. der spektralen Ränder.

Mit den Fragen 1 und 2 beschäftigen wir uns in der gesamten vorliegenden Arbeit, konkrete Aussagen machen wir in den Theoremen 2.1.4 und 2.1.12. Auf Frage 3 wird insbesondere in Theorem 3.1.2 und in den Abschnitten 3.2 und 5.1 eingegangen.



## Kapitel 2

# Resultate zur Lokalisierung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels führen wir die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse auf. Sie beruhen auf den Beweisen in den Kapiteln 3 bis 5 und dem abstrakten Lokalisierungs-Theorem in Abschnitt 2.2. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels ist der Diskussion der bisherigen Ergebnisse zur Lokalisierung gewidmet, sowie ihrem Bezug zu den hier vorgestellten neuen Resultaten.

### 2.1 Neue Resultate

Die im Weiteren vorgestellten Ergebnisse betreffen das Spektrum eines periodischen Schrödinger-Operators  $H_0$ , welcher durch ein Legierungs-Potential  $V_\omega$  gestört wird. Satz 2.1.19 bezieht sich auf das diskrete Analogon dieses Operators, das Anderson-Modell. Die Resultate gliedern sich in zwei Gruppen: die auf Satz 2.1.9 beruhenden Ergebnisse (2.1.4 bis 2.1.8) zur *Lokalisierung an inneren spektralen Kanten*; sowie die Resultate 2.1.10 bis 2.1.19, welche *indefinite Legierungs-Potentiale* betreffen und auf der neuen *Wegner-Abschätzung* 2.1.12 basieren. Aus Theorem 2.1.12 folgt zudem die Existenz der *Zustandsdichte*.

Wir legen die Voraussetzungen an den deterministischen Teil  $H_0$  und den zufälligen Teil  $V_\omega$  des Schrödinger-Operators fest. In vielen Fällen sind sie restriktiver als nötig, um die Aussagen verständlicher zu halten. Sofern die Beweise für allgemeineren Fälle gelten, wird dies in nachfolgenden Bemerkungen erwähnt. Verallgemeinerungen, die noch zusätzliche Arbeit erfordern, werden in Kapitel 6 diskutiert. Innerhalb dieses Abschnitts beziehen wir uns auf die Annahmen nur mit den Großbuchstaben  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\dots$ .

#### Definition 2.1.1

Sei  $H$  ein selbstadjungierter Operator. Eine Energie  $E \in \sigma(H)$  heißt untere spektrale Kante oder unterer spektraler Rand von  $H$ , falls ein  $r > 0$  existiert

so, daß

$$]E - r, E[ \subset \rho(H), [E, E + r] \subset \sigma(H). \quad (2.1)$$

Unterhalb von  $E$  befindet sich die spektrale Lücke  $]E - r, E[$ . Sie besitzt mindestens die Länge  $r$ . Entsprechend definiert man eine obere spektrale Kante. Wenn  $H$  ein periodischer Schrödinger-Operator ist, nennen wir die spektralen Ränder auch Bandkanten.

**Annahme 2.1.A (Allgemeine Voraussetzungen an  $H_\omega = H_0 + V_\omega$ )**

- (i) **Periodischer Operator.** Der Operator  $H_0 = -\Delta + V_0$  setzt sich zusammen aus dem negativen Laplace-Operator  $-\Delta = -\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  auf  $\mathbb{R}^d$  und einem reellen,  $\mathbb{Z}^d$ -periodischen Potential  $V_0 \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ . Wie in (1.9) erklärt, hängt der zulässige Exponent  $p = p(d)$  von der Raumdimension  $d$  ab.

- (ii) **Legierungs-Potential.** Die zufällige Störung ist ein Legierungs-Potential

$$V_\omega(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_k u(x - k). \quad (2.2)$$

Die  $\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d$  heißen *zufällige Kopplungskonstanten*. Es handelt sich um unabhängige, identisch verteilte, reellwertige Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ . Das Maß  $\mu$  ist absolutstetig bezüglich des Lebesguemaßes mit einer Dichte

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \text{supp} f = [0, \omega_+]. \quad (2.3)$$

Man faßt  $\omega = \{\omega_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  als Element des Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  auf, vgl. (1.3). Das Einzelplatz-Potential  $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  hat kompakten Träger und ist aus  $L^p(\mathbb{R}^d), p = p(d)$ .

**Annahme 2.1.B (Voraussetzungen bei inneren spektralen Rändern)**

- (i) **Semidefinites Potential.** Das Einzelplatz-Potential besitzt die charakteristische Funktion einer offenen Menge als untere Schranke. Ohne Einschränkung kann man dann annehmen

$$\exists L > 0 : u \geq \chi_{\Lambda_L} \quad \Lambda_L := \{x \mid \|x\|_\infty \leq L/2\}. \quad (2.4)$$

- (ii) **Regularität der Floquet-Extrema.** Die Energie  $E \in \mathbb{R}$  ist eine untere, Floquet-reguläre spektrale Kante des periodischen Operators  $H_0$ . Dies bedeutet, daß alle Floquet-Eigenwerte, die den Wert  $E$  annehmen, dort als Funktion des Quasi-Impulses eine positiv definite Hesse-Matrix aufweisen. Für die präzise Definition siehe 3.3.1.

**Bemerkung 2.1.2**

Die Annahme, daß die Zufallsvariablen  $\omega_k$  nur nicht-negative Werte annehmen, ist keine Einschränkung. Falls der Wertebereich von  $\omega_k$  ein beliebiges Intervall  $[\omega_-, \omega_+]$  ist, kann man das Potential umschreiben

$$V_0 + V_\omega = \left[ V_0 + \omega_- \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u(\cdot - k) \right] + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (\omega_k - \omega_-) u(\cdot - k) \quad (2.5)$$

$$=: \tilde{V}_0 + V_{\tilde{\omega}}. \quad (2.6)$$

Man hat nun ein modifiziertes  $\mathbb{Z}^d$ -periodisches Potential  $\tilde{V}_0$  und die neuen Kopplungskonstanten  $\omega_k - \omega_-$  nehmen nur nicht-negative Werte an.

Falls das Einzelplatz-Potential nur

$$u \geq t\chi_{\Lambda_L}, \quad L > 0 \quad (2.7)$$

für ein  $t \in ]0, 1[$  erfüllt, kann man diesen Fall auf (2.4) zurückführen. Dabei benutzt man eine Umskalierung. Sei

$$\tilde{\omega}_k = t\omega_k \quad \forall k \quad \text{und} \quad \tilde{u} = \frac{1}{t}u.$$

Dann folgt

$$\tilde{u} \geq \chi_{\Lambda_L} \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_k \tilde{u}(\cdot - k) = \omega_k u(\cdot - k).$$

**Annahme 2.1.C (Voraussetzungen für indefinite Potentiale)**

- (i) **Einzelplatz-Potential mit verallgemeinerter Treppenform.** Das Einzelplatz-Potential hat die Form:

$$u(x) := \sum_{l \in \Gamma} \alpha_l w(x - l). \quad (2.8)$$

Dabei ist  $\Gamma$  eine endliche Teilmenge von  $\mathbb{Z}^d$  und  $w \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $p = p(d)$  mit

$$\exists t > 0 : w \geq t\chi_0, \quad \text{supp } w \text{ kompakt.} \quad (2.9)$$

$\chi_0$  bezeichnet die charakteristische Funktion von  $[0, 1]^d$ . Der *Faltungsvektor*  $\alpha = \{\alpha_l, l \in \Gamma\}$  erfüllt die Bedingungen

$$\alpha^* := \sum_{l \neq 0} |\alpha_l| < \alpha_0 \neq 0. \quad (2.10)$$

Insbesondere kann  $u$  das Vorzeichen wechseln. Die Bedingung 2.10 bedeutet, daß das Einzelplatz-Potential in der Nähe eines Gitterplatzes konzentriert ist.

- (ii) **Differenzierbare Dichte.** Die Dichte  $f$  der zufälligen Kopplungskonstanten ist aus  $W^{1,1}(\mathbb{R})$ .

**Bemerkung 2.1.3**

Wegen Bemerkung 2.1.2 können wir (2.9) auf den Fall

$$w \geq \chi_0, \text{ supp } w \text{ kompakt} \quad (2.11)$$

zurückführen. Ebenso kann man ohne Einschränkung statt (2.10)

$$\alpha_0 = 1 \text{ und } \alpha^* = \sum_{l \neq 0} |\alpha_l| < 1. \quad (2.12)$$

annehmen. Dazu setzt man

$$\tilde{\alpha}_l := \frac{\alpha_l}{\alpha_0} \quad \forall l \in \Gamma \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_k := \alpha_0 \omega_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d.$$

Für  $\tilde{u} := \sum_{l \in \Gamma} \tilde{\alpha}_l w(\cdot - l)$  folgt

$$\tilde{\alpha}_0 = 1, \quad \tilde{\alpha}^* = \sum_{l \neq 0} \frac{|\alpha_l|}{\alpha_0} = \frac{\alpha^*}{\alpha_0} < 1$$

und

$$\tilde{\omega}_k \tilde{u}(x - k) = \alpha_0 \omega_k \sum_{l \in \Gamma} \frac{\alpha_l}{\alpha_0} w(x - l - k) = \omega_k u(x - k).$$

Damit haben wir das Legierungs-Potential in der Form  $\sum_k \tilde{\omega}_k \tilde{u}(\cdot - k)$  geschrieben, an der man sieht, daß die Bedingung (2.12) erfüllt ist. Falls ein anderer Koeffizient  $\alpha_{l_0}$  der Ungleichung

$$\sum_{l \neq l_0} |\alpha_l| < \alpha_{l_0} \neq 0$$

genügt, kann man durch eine Umindizierung (2.10) erreichen.

**Annahme 2.1.D (Spiegelsymmetrie des periodischen Potentials)**

Das periodische Potential  $V_0$  ist symmetrisch bezüglich der Spiegelungen an den Koordinatenachsen. D.h. die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_d)$$

läßt für jedes  $i = 1, \dots, d$  das Potential  $V_0$  invariant.

**Annahme 2.1.E (Abfall der Dichte an ihren Rändern)**

Es existiert ein  $\tau > d/2$ , so daß:

$$\int_0^\epsilon f(x) dx \leq \epsilon^\tau \text{ sowie } \int_{\omega_+ - \epsilon}^{\omega_+} f(x) dx \leq \epsilon^\tau \quad (2.13)$$

für genügend kleine  $\epsilon$ .



Das Hauptresultat zur Existenz von reinem Punktspektrum an inneren, unteren spektralen Rändern ist folgendes

**Theorem 2.1.4**

Sei  $H_\omega = H_0 + V_\omega$  ein zufälliger Schrödinger-Operator und  $E$  sei eine untere spektrale Kante sowohl von  $H_0$  als auch von  $H_\omega$ . Die Annahmen **A** und **B** seien erfüllt. Dann existiert ein  $r > 0$ , so daß

$$[E, E + r] \subset \sigma_{pp}(H_\omega) \quad \text{und} \quad [E, E + r] \cap \sigma_c(H_\omega) = \emptyset \quad (2.14)$$

für fast alle  $\omega \in \Omega$  gilt. Die Eigenfunktionen zu Eigenwerten in  $[E, E + r]$  fallen fast sicher exponentiell ab.

Unter dem exponentiellem Abfall einer Funktion  $\phi$  verstehen wir, daß mit geeigneten Konstanten  $0 < c, C < \infty$

$$|\phi(x)| \leq C e^{-c\|x\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

gilt. Wir nennen  $[E, E + r]$ , oder genauer  $\sigma(H_\omega) \cap [E, E + r]$  das *Lokalisierungs-Intervall*.

**Bemerkung 2.1.5**

Sei  $E$  ein unterer spektraler Rand von  $H_0$  und  $V_\omega$  ein nicht-negatives Störpotential. Aus den Eigenschaften von  $f$  folgt, daß  $E$  auch eine Kante von  $H_0 + V_\omega$  bleibt, falls  $V_\omega$  eine kleine Störung von  $H_0$  ist. Siehe dazu den Abschnitt 2 von [KSS98b]. Es reicht z.B, daß die Norm von  $V_\omega$  kleiner ist als die Länge der spektralen Lücke, an der sich  $E$  befindet.

Die Korollare 2.1.6 und 2.1.8 folgen aus Theorem 2.1.4. Sie betreffen Situationen, in denen die Regularität der Minima der Floquet-Eigenwerte bekannt ist.

**Korollar 2.1.6**

Sei die Raumdimension  $d = 1$  oder  $2$  und  $E$  eine untere spektrale Kante sowohl von  $H_0$  als auch von  $H_\omega$ . Falls  $H_\omega$  die Bedingungen **A** und **B** (i) erfüllt, existiert ein  $r > 0$ , so daß fast sicher (2.14) gilt und die zu Eigenwerten im Intervall  $[E, E + r]$  gehörende Eigenfunktionen fast sicher exponentiell abfallen.

**Bemerkung 2.1.7**

Für eindimensionale Schrödinger-Operatoren ist bekannt, daß die Floquet-Eigenwerte nahe der Spektralkanten analytisch und daß alle Kanten Floquet-regulär sind, siehe XIII.16 in [RS78] und [Eas73]. Daher ist Theorem 2.1.4 sofort anwendbar. Im Fall der Raumdimension  $d = 2$  ist es Klopp und Wolff [KW00] gelungen, auch ohne die Annahme der Regularität der Floquet Eigenwerte (verallgemeinerte) Lifschitz-Singularitäten nachzuweisen, vgl. Definition

3.1.1 und Bemerkung 3.6.9. In diesem Fall muß man den Beweis im Abschnitt 3.6 leicht modifizieren (Bemerkung 3.6.9).

Wir wenden uns dem Fall höherer Dimensionen zu. Für beliebige  $d$  kann man nachweisen, daß Lokalisierung an (unteren) spektralen Rändern ein generisches Phänomen ist. Damit meinen wir, daß die Menge der Potentiale und Bandkanten, bei denen Lokalisierung auftritt, offen und dicht in einem geeigneten Topologischen Raum ist. Dies ist ein aktuelles Resultat von Klopp und Ralston [KR00]. Aus deren Theorem 0.1 und unserem Theorem 2.1.4 folgt Korollar 2.1.8.

Sei  $\mathcal{P}$  die Menge der beschränkten,  $\mathbb{Z}^d$ -periodischen Potentiale. Sei  $E(V)$  eine untere spektrale Kante von  $-\Delta + V, V \in \mathcal{P}$ . Aus den Betrachtungen in Abschnitt 2 von [KSS98b] folgt, daß  $E(V)$  stetig in  $V \in \mathcal{P}$  ist.

### Korollar 2.1.8

Seien  $H_0 = -\Delta + V, V \in \mathcal{P}, V_\omega$  ein Legierungs-Potential und  $E(V)$  eine untere Bandkante, die nach der Perturbation durch  $V_\omega$  eine spektrale Kante von  $H_\omega = -\Delta + V + V_\omega$  bleibt. Seien die Annahmen **A** und **B** (i) erfüllt. Dann ergibt sich die Fallunterscheidung:

- Falls ein  $r(V, E(V)) = r > 0$  existiert, so daß

$$[E, E + r] \subset \sigma_{pp}(H_\omega) \text{ und } [E, E + r] \cap \sigma_c(H_\omega) = \emptyset, \text{ für fast alle } \omega \in \Omega \quad (2.15)$$

dann gilt diese Eigenschaft auch in einer  $\|\cdot\|_\infty$ -Umgebung des Potentials  $V$ , mit entsprechender Bandkante  $E(V)$ .<sup>1</sup>

- Andernfalls existiert für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $V_\epsilon \in \mathcal{P}$  mit  $\|V - V_\epsilon\|_\infty < \epsilon$ , so daß für  $H_\omega := -\Delta + V_\epsilon + V_\omega$  (2.15) gilt, mit entsprechender, eventuell verschobener, Bandkante  $E(V_\epsilon)$ .

Die Aussage (2.15) läßt sich durch den Zusatz verstärken, daß die Eigenfunktionen zu Eigenwerten in  $[E, E + r]$  fast sicher exponentiell abfallen.

Theorem 2.1.4 und damit die beiden Korollare 2.1.8 und 2.1.6 beruhen auf folgender Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit, in der Nähe von spektralen Rändern Eigenwerte des restringierten Schrödinger-Operators anzutreffen.

<sup>1</sup>Um genau zu sein, muß Bedingung (2.15) durch

$$\text{und } E(V) \text{ ist ein Floquet-regulärer spektraler Rand von } H_0$$

ergänzt werden. Ansonsten könnte es sich bei  $E(V)$  um eine spektrale Kante handeln, an der Lokalisierung vorkommt, die aber nicht Floquet-regulär ist. Dann könnte das Potential  $V$  am Rand der Menge der Potentiale liegen, bei denen nach der zufälligen Störung  $V_\omega$  Lokalisierung in einer Umgebung von  $E(V)$  auftritt.

**Satz 2.1.9**

Sei  $E$  eine untere spektrale Kante sowohl von  $H_0$  als auch von  $H_\omega$ . Unter den Annahmen **A** und **B** gilt für alle  $q > 0$ :

Es existiert eine Skala  $l_0 := l_0(q) \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $l \geq l_0$

$$\mathbb{P}\{\omega \mid \sigma(H_\omega^{l,\text{per}}) \cap [E, E + l^{-\frac{1}{2}}] \neq \emptyset\} \leq l^{-q} \quad (2.16)$$

gilt.

Hier bezeichnet  $H_\omega^{l,\text{per}}$  die Restriktion von  $H_\omega$  auf den Würfel  $\Lambda_l$  mit periodischen Randbedingungen. Die Aussage von Satz 2.1.9 nennt man *Anfangsskalen-Bedingung* oder *Anfangsskalen-Abschätzung*, da man mit ihr den Induktionsanfang für den Beweis der Lokalisierung herleitet, siehe Theorem 2.2.11.

Wir wenden uns den Resultaten über Legierungs-Modelle mit indefiniten Einzelplatz-Potentialen zu.

**Theorem 2.1.10**

Erfülle  $H_\omega$  die Annahmen **A**, **C** und **D** und sei  $E = \inf \sigma(H_\omega)$ . Dann existieren  $\epsilon, r > 0$ , so daß für Einzelplatz-Potentiale mit  $\sum_{\alpha_l < 0} \alpha_l \geq -\epsilon$  gilt:

$$[E, E + r] \subset \sigma_{pp}(H_\omega) \quad \text{und} \quad ]-\infty, E + r] \cap \sigma_c(H_\omega) = \emptyset$$

für fast alle  $\omega$ . Die Eigenfunktionen zu Eigenwerten aus dem Intervall  $] -\infty, E + r]$  fallen fast sicher exponentiell ab.

**Theorem 2.1.11**

Seien die Annahmen **A**, **C** und **E** an  $H_\omega$  erfüllt und sei  $E$  eine spektrale Kante von  $H_\omega$ . Dann existieren  $\epsilon, r > 0$ , so daß für Einzelplatz-Potentiale mit  $\sum_{\alpha_l < 0} \alpha_l \geq -\epsilon$  gilt:

$$\emptyset \neq \sigma(H_\omega) \cap ]E - r, E + r] \subset \sigma_{pp}(H_\omega) \quad \text{und} \quad ]E - r, E + r] \cap \sigma_c(H_\omega) = \emptyset \quad (2.17)$$

für fast alle  $\omega$  und die Eigenfunktionen zu Eigenwerten aus dem Intervall  $]E - r, E + r]$  fallen fast sicher exponentiell ab.

Diese letzten beiden Resultate beruhen auf

**Theorem 2.1.12**

Erfülle  $H_\omega$  die Annahmen **A** und **C**. Sei  $H_\omega^l$  die Einschränkung von  $H_\omega$  auf den Würfel  $\Lambda_l$  mit Dirichlet-, Neumann- oder periodischen Randbedingungen und  $P_\omega^l(I)$  der Spektralprojektor von  $H_\omega^l$  auf das Energieintervall  $I$ . Dann gilt

$$\mathbb{E} \left\{ \text{Tr} \left[ P_\bullet^l(I) \right] \right\} \leq C_W l^d |I| \quad (2.18)$$

für alle Skalen  $l \in \mathbb{N}$  und alle Energieintervalle  $I$ . Hierbei bezeichnet  $\text{Tr}$  die Spur eines Operators und  $\mathbb{E}$  den Erwartungswert auf dem Raum  $(\Omega, \mathbb{P})$ .

**Korollar 2.1.13**

Theorem 2.1.12 behält seine Gültigkeit, falls man auf den kompakten Träger von  $w$  verzichtet. Es reicht, wenn  $w$  im Unendlichen exponentiell abfällt. Die Dichte  $f$  muß nicht ein kompaktes Intervall als Träger besitzen, sondern kann eine beliebige Funktion aus  $W^{1,1}(\mathbb{R})$  sein.

**Bemerkung 2.1.14**

Sei  $I = [E_1, E_2]$ . Dann ist die Wegner-Konstante auf der rechten Seite von (2.18) für  $l \in 2\mathbb{N}$  gegeben durch

$$C_W(E_2) := e^{E_2} C_{\text{Tr}} \frac{\|f\|_\infty}{1 - \alpha^*} l^d |E_2 - E_1|$$

Dabei ist  $C_{\text{Tr}} = \text{Tr} e^{-H_{0,0}}$  und  $H_{0,0}$  die Neumann-Einschränkung des periodischen Operators auf den Einheitswürfel  $]0, 1[^d$ . Die Eigenschaften des Einzelplatz-Potentials gehen durch  $\alpha^*$  in die Abschätzung ein, vgl. (2.12). Insbesondere hängt  $C_W$  monoton von  $E_2$  ab und kann fest gewählt werden, falls man  $E_1$  und  $E_2$  nur in einem halbbeschränkten Intervall  $] - \infty, E]$  variieren läßt.

Folgendes Korollar beinhaltet zwei Aussagen, die Theorem 2.1.12 impliziert. Die erste betrifft die Existenz der Zustandsdichte, die zweite geht in den Beweis der Lokalisierungs-Theoreme 2.1.10 und 2.1.11 ein.

**Korollar 2.1.15**

1. Die integrierte Zustandsdichte von  $H_\omega$  ist Lipschitz-stetig. Die Ableitung  $dN(E)/dE$  existiert für fast alle  $E$ . Sie wird Zustandsdichte genannt.
2. Es gilt die schwache Wegner-Abschätzung

$$\mathbb{P}\{\omega \mid d(\sigma(H_\omega^l), E) \leq \eta\} \leq 2 C_W(E + \eta) \eta |\Lambda|. \quad (2.19)$$

Oft wird auch die Ungleichung (2.18) Wegner-Abschätzung genannt. Sie ist eine etwas stärkere Aussage als Punkt 2 von Korollar 2.1.15. Dies erklärt unseren Sprachgebrauch.

**Bemerkung 2.1.16**

Man bemerke, daß  $l^d = |\Lambda_l|$  ist, d.h. daß die Abschätzung linear im Volumen des Konfigurationsraumes ist. Aussage 1 von Korollar 2.1.15 gilt, weil nach der Normierung mit  $|\Lambda_l|^{-1}$  die rechte Seite von (2.18) nicht mehr vom Volumen abhängt. Somit gilt auch nach dem Grenzübergang  $l \rightarrow \infty$  die obere Schranke  $C_W |I|$ . Die zweite Aussage folgt aus der Čebyšev-Ungleichung:

$$\mathbb{P}\{\omega \mid d(\sigma(H_\omega^l), E) \leq \eta\} \leq \mathbb{E} \left\{ \text{Tr} \left[ P_\bullet^l(I) \right] \right\}, \quad (2.20)$$

falls  $I := [E - \eta, E + \eta]$ .

Um aufzuzeigen, daß für die Wegner-Abschätzung die Bedingungen (2.10) und C(ii) aufgeweicht werden können, führen wir noch folgenden Satz an.

**Satz 2.1.17**

Seien die Annahmen **A** und (2.8) erfüllt. Sei  $e_1 := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\alpha_{e_1} = -1$  und  $\alpha_0 = 1$ . Für  $k \neq 0, k \neq e_1$  sei der Koeffizient  $\alpha_k$  gleich Null. Die Dichte  $f$  entspreche einer Gleichverteilung  $f = \omega_+^{-1} \chi_{[0, \omega_+]}$  oder sei aus  $W^{1,1}(\mathbb{R})$ . Dann gilt:

$$\mathbb{E} \left\{ \text{Tr} \left[ P_{\bullet}^l(I) \right] \right\} \leq C_W l^{2d} |I| \quad (2.21)$$

**Bemerkung 2.1.18**

Ein weiteres Beispiel eines Einzelplatz-Potentials, für welches die Abschätzung (2.21) in Verbindung mit einer Dichte  $f \in W^{1,1}$  gilt, ist

$$u = \chi_{(0, \dots, 0)} + \chi_{(-1, -1, 0, \dots, 0)} - \chi_{(-1, 0, \dots, 0)} - \chi_{(0, -1, 0, \dots, 0)}, \quad (2.22)$$

welches dem Faltungsvektor mit den Komponenten  $\alpha_0 = \alpha_{-e_1 - e_2} = 1, \alpha_{-e_1} = \alpha_{-e_2} = -1$  entspricht.

Einige der obigen Resultate kann man auf zufällige Operatoren auf  $l^2(\mathbb{Z}^d)$  übertragen. Wir formulieren ein Ergebnis für das Anderson-Modell mit indefiniten Potentialen.

**Annahme 2.1.F (an das Anderson-Modell  $h_\omega = h_0 + v_\omega$ )**

(i) **Diskreter Laplace-Operator.** Sei  $h_0$  auf  $\phi \in l^2(\mathbb{Z}^d)$  definiert durch:

$$(h_0 \phi)_k = \sum_{|j|=1} \phi_{k+j}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d. \quad (2.23)$$

(ii) **Zufälliges Potential.** Das Anderson Potential ist eine zufällige Diagonalmatrix und wirkt auf  $\phi \in l^2(\mathbb{Z}^d)$  durch:

$$(v_\omega \phi)_i := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_k \sum_{l \in \Gamma} \alpha_l \delta(i - k - l) \phi_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \alpha_{i-k} \omega_k \phi_i. \quad (2.24)$$

Wir nennen  $u_i := \sum_{l \in \Gamma} \alpha_l \delta(i - l)$  *Einzelplatz-Potential*. Es soll

$$\alpha_0 = 1 \text{ und } \alpha^* := \sum_{l \neq 0} |\alpha_l| < 1 \quad (2.25)$$

erfüllen. Die Kopplungskonstanten  $\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d$  sind unabhängig, identisch verteilt mit Dichte  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ .

**Theorem 2.1.19**

Erfülle  $h_\omega$  die Annahmen **F**. Sei  $h_\omega^l$  die Einschränkung von  $h_\omega$  auf den Würfel  $\Lambda_l$  und  $P_\omega^l(I)$  der Spektralprojektor von  $h_\omega^l$  auf das Energie-Intervall  $I$ . Dann gilt

$$\mathbb{E} \left\{ \text{Tr} \left[ P_\bullet^l(I) \right] \right\} \leq C_W l^d |I| \quad (2.26)$$

für alle Skalen  $l \in \mathbb{N}$  und alle Energie-Intervalle  $I$ .

Auch die Aussagen von Korollar 2.1.15 und Satz 2.1.17 sind auf das diskrete Modell übertragbar, vgl. Unterabschnitt 4.6.2. Im nächsten Abschnitt 2.2 beschreiben wir in Bemerkung 2.2.12, wie man Theorem 2.1.19 nutzen kann, um zu den Theoremen 2.1.10 und 2.1.11 analoge Lokalisierungs-Resultate zu beweisen.

**2.2 Allgemeine Theoreme**

Theorem 2.1.9 zur Anfangsskalen-Abschätzung und Theorem 2.1.12 zur Wegner-Abschätzung führen mit Hilfe der Multiskalen-Analyse zum Beweis der Existenz von reinem Punktspektrum, siehe Theorem 2.2.11 und Bemerkung 2.2.12. Da die Multiskalen-Analyse für zufällige Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$  eine aufwendige, aber mittlerweile gut verstandene Prozedur ist, skizzieren wir nur die wesentlichen Schritte. Eine bis ins Detail ausgearbeitete Darstellung findet man in dem Buch [Sto] von Stollmann. Alternative Quellen sind [MH84, CH94, Fis96, Ves96] und [KSS98b].

Sei  $H_\omega = -\Delta + V_0 + V_\omega$  ein zufälliger Schrödinger-Operator, wobei  $V_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $p = p(d)$  ein  $\mathbb{Z}^d$ -periodisches Potential und

$$V_\omega(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_k u(x - k)$$

ein Legierungs-Potential ist. Die Kopplungskonstanten  $\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d$  seien unabhängig und identisch verteilt und das Einzelplatz-Potential  $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$  habe kompakten Träger.

Wir stellen die Combes-Thomas Abschätzung vor, welches es erlaubt, aus einer Normabschätzung der Resolventen viel feinere Informationen über den Abfall der entsprechenden Greenschen Funktion in den Raumkoordinaten zu bekommen.

**Proposition 2.2.1**

Sei  $\Lambda$  ein Würfel und  $C_V := \sup_{x, \omega} \|\chi_{\Lambda+x} V_\omega\|_p < \infty$ ,  $p = p(d)$  und  $R > 0$ . Dann existieren Konstanten  $c_i(C_V, R)$ ,  $i = 1, 2$ , so daß für Dirichlet-, Neumann- oder periodische Randbedingungen ( $\bullet = D, N, \text{per}$ ) die beiden Bedingungen

(a) Seien  $A, B$  Teilmengen des Würfels  $\Lambda_l$  mit dem Abstand  $d(A, B) = \delta > 0$  und der Eigenschaft  $B \subset \Lambda_{l-\epsilon}$  für ein festes  $\epsilon > 0$ .

(b) Sei  $E \in ]E_1, E_2[ \subset \rho(H_\omega^{l,\bullet}) \cap ]-R, R[$  und  $r = d(E, ]E_1, E_2[^c) > 0$ .

die exponentielle Schranke

$$\|\chi_A(H_\omega^{l,\bullet} - E)^{-1}\chi_B\| \leq \frac{c_1}{r} e^{-c_2\delta\sqrt{E_2 - E_1}\sqrt{r}} \quad (2.27)$$

implizieren.  $]E_1, E_2[^c$  bezeichnet das Komplement der Menge  $]E_1, E_2[$ . Falls das Intervall  $]E_1, E_2[$  festgelegt ist, bezeichnen wir mit  $c_3$  die Konstante  $c_2 |E_1 - E_2|$ .

Dieses Resultat wurde von Barbaroux, Combes und Hislop in [BCH97] bewiesen und bildet eine Verschärfung der Abschätzungen in [CT73]. Die Formulierung der Proposition folgt der aus Abschnitt 2.4 von [Sto] bzw. dem Anhang von [KSS98b].

### Bemerkung 2.2.2

Proposition 2.2.1 gibt einen Einblick

1. an welcher Stelle der exponentielle Abfall der Greenschen Funktion der Resolvente bzw. der Eigenfunktionen ins Spiel kommt. Dieses Verhalten ist ja der Anfangsskalen-Abschätzung von Satz 2.1.9 nicht anzusehen, aber im Lokalisierungs-Theorem 2.2.11 enthalten.
2. in den Zusammenhang zwischen der Längenskala  $l$  und der Energieskala  $r = d(\sigma(H_\omega^l), E)$ . Man beachte, daß  $r \gg l^{-2}$  notwendig ist, damit die Ungleichung (2.27) überhaupt einen exponentiellen Abfall beschreibt. Für  $r \approx l^{-2}$  würde wegen  $d(A, B) \leq l$  für den Exponenten  $\delta\sqrt{r} \approx 1$  folgen.

Anhand dieser Überlegungen zur Wahl der Skalen wird klar, daß die richtige gegenseitige Abhängigkeit der Parameter eine entscheidende Rolle für unsere Überlegungen spielt. Leider führt dies dazu, daß die Formulierung der folgenden Propositionen etwas technisch wirkt. Man sollte sich davon nicht abschrecken lassen und beim ersten Lesen vor allem auf die qualitativen Eigenschaften wie „exponentieller Abfall“, „kleine Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von  $l$ “ usw. achten.

### Definition 2.2.3

Für  $x \in \mathbb{R}^d, l \in \mathbb{N}$  und  $\Lambda = \Lambda_l + x = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y - x\|_\infty \leq \frac{l}{2}\}$  setzen wir

$$\begin{aligned} \Lambda^{in} &:= \Lambda_{l/3} + x \\ \Lambda^{aus} &:= \Lambda_{l-2} + x \end{aligned}$$

und bezeichnen mit  $\chi^{in}$  und  $\chi^{aus}$  die entsprechenden charakteristischen Funktionen. Der Punkt  $\bullet$  stehe für die Dirichlet-, Neumann- oder periodischen Randbedingungen und

$$R^\Lambda = R^\Lambda(E) = (H_\omega^{\Lambda, \bullet} - E)^{-1}$$

für die Resolvente. Für den Rest des Abschnitts legen wir einen Typ von Randbedingungen fest und schreiben  $H_\omega^\Lambda$  für  $H_\omega^{\Lambda, \bullet}$  bzw.  $H_\omega^l$  für  $H_\omega^{l, \bullet}$ . Einen Würfel  $\Lambda$  nennen wir  $(\gamma l, \mathbf{E})$ -gut für  $\omega \in \Omega$ , falls

$$E \in \rho(H_\omega^\Lambda) \text{ und } \|\chi^{aus} R^\Lambda(E) \chi^{in}\| \leq e^{-\gamma l}$$

gilt. Ansonsten heißt  $\Lambda$   $(\gamma l, \mathbf{E})$ -schlecht.  $\gamma$  wird Exponent des Abfalls oder Masse das exponentiellen Abfalls genannt.

#### Notation 2.2.4

Sei der Träger des Einzelplatz-Potentials in  $\Lambda_g$  enthalten,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma, \xi > 0$ , sowie  $I$  ein Energieintervall. Der Schlüssel zum Lokalisierungs-Beweis ist folgende Aussage über den exponentiellen Abfall der Resolventen.

$$\begin{aligned} \mathbf{IA}(\mathbf{I}, l, \gamma, \xi) \quad & \text{für alle } x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ mit } \|x - y\|_\infty > l + g \text{ gilt} \\ \mathbb{P}\{\forall E \in I : \Lambda_l + x \text{ oder } \Lambda_l + y \text{ ist } (\gamma l, \mathbf{E})\text{-gut für } \omega\} & \geq 1 - l^{-2\xi} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Aussage (2.28) besagt, daß auf großen Skalen  $l$  mit hoher Wahrscheinlichkeit für alle Energien  $E$  in  $I$  ein Großteil der Würfel  $(\gamma l, \mathbf{E})$ -gut ist. Die Koeffizienten  $\gamma, \xi$  können von der betrachteten Längenskala abhängen. Die Abkürzung **IA** steht für **I**nduktions**A**nfang.

#### Notation 2.2.5

Sei  $E_0$  eine spektrale Kante von  $H_\omega$  und

$$I = \left[ E_0 - \frac{1}{2}l^{-2+\beta}, E_0 + \frac{1}{2}l^{-2+\beta} \right]. \quad (2.29)$$

Wir führen zwei Eigenschaften ein, die eine entscheidende Rolle für die Multiskalen-Analyse spielen. Sei  $\beta \in ]0, 2[$  und

$$\Omega(E_0, l, \beta) := \left\{ \omega \mid d(\sigma(H_\omega^l), E_0) < l^{-2+\beta} \right\}.$$

Die *Anfangsskalen-Bedingung* für die Energie  $E_0$  und die Kantenlänge  $l$  besagt

$$\exists \xi > 0, \beta \in ]0, 2[: \quad \mathbb{P}\{\Omega(E_0, l, \beta)\} \leq l^{-\xi}. \quad (2.30)$$

Aus ihr werden wir in Lemma 2.2.6 den Induktionsanker für die Multiskalen-Analyse gewinnen. Für den Induktionsschritt braucht man die *schwache Wegner-Abschätzung*:

$$\mathbf{SWA}(\mathbf{E}) \quad \mathbb{P}\{d(\sigma(H_\omega^{l, \text{per}}), E) < \epsilon\} \leq C\epsilon l^{2d} \quad \text{für alle } \epsilon \in ]0, 1[, l \in \mathbb{N}, \quad (2.31)$$

wobei die Konstante  $C$  unabhängig von  $\epsilon$  und  $l$  ist.



Für  $E \in I$  und  $\omega \notin \Omega(E_0, l, \beta)$  gilt

$$d(\sigma(H_\omega^l), E) \geq \frac{1}{2}l^{-2+\beta}.$$

Sei  $\Lambda = \Lambda_L$ ,  $A = \Lambda^{aus}$ ,  $B = \Lambda^{in}$ . Mit dem Combes-Thomas Argument (Proposition 2.2.1) folgt

$$\|\chi^{aus} R^l(E) \chi^{in}\| \leq 2c_1 l^{2-\beta} \exp\left(-c_3 \left(\frac{l}{3} - 2\right) l^{\frac{\beta}{2}-1}\right).$$

Wir setzen  $\gamma = \gamma_l = l^{\beta-1}$ . Falls  $\beta/2 > \tilde{\beta}$  gewählt wird, existiert ein  $l_0 = l_0(\beta, \tilde{\beta}, c_1, c_3)$ , so daß für alle  $l \geq l_0$

$$\|\chi^{aus} R^l(E) \chi^{in}\| \leq e^{-\gamma l}$$

gilt. Damit haben wir gezeigt:

**Lemma 2.2.6**

Sei  $l_0 \in \mathbb{N}$ . Die Anfangsskalen-Bedingung gelte für eine spektrale Kante  $E_0$  von  $H_\omega$  und alle  $l \geq l_0$  mit  $l \in \mathbb{N}$ . Sei  $\beta \in ]0, 2[$ ,  $\tilde{\beta} < 2\beta$  und

$$I = [E_0 - \frac{1}{2}l^{-2+\beta}, E_0 + \frac{1}{2}l^{-2+\beta}].$$

Dann existiert ein  $l_1 = l_1(\beta, \tilde{\beta}, c_1, c_3) \geq l_0$ , so daß für  $l \geq l_1$  und  $\gamma = \gamma_l \geq l^{\tilde{\beta}-1}$  gilt:

$$\mathbb{P}\{\exists E \in I : \Lambda_l \text{ ist } (\gamma, E)\text{-schlecht}\} \leq l^{-\xi}$$

Daraus folgt insbesondere **IA(I, l, γ, ξ)**.

$I$  ist das Energieintervall, für das wir schließlich in Theorem 2.2.11 Lokalisierung, d.h. die fast sichere Existenz von reinem Punktspektrum von  $H_\omega$ , zeigen.

**Bemerkung 2.2.7**

Seien  $H = H_\omega$  und  $\Lambda \subset \Lambda'$  zwei Würfel,  $\phi \in C_0^1(\Lambda) \subset C_0^1(\Lambda')$  und  $E \in \rho(H^\Lambda) \cap \rho(H^{\Lambda'})$ . Dann gilt die *geometrische Resolventen-Formel*:

$$(H^\Lambda - E)^{-1} \phi = \phi (H^{\Lambda'} - E)^{-1} + (H^\Lambda - E)^{-1} [(\nabla \phi) \nabla - \Delta \phi] (H^{\Lambda'} - E)^{-1}$$

im Operator-Sinne auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Eine geeignete Gradienten-Abschätzung impliziert die *geometrische Resolventen-Ungleichung*: Seien  $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$ ,  $A \subset \Lambda^{in}$ , dann gilt:

$$\|\chi_B (H^{\Lambda'} - E)^{-1} \chi_A\| \leq C \|\chi_B (H^{\Lambda'} - E)^{-1} \chi_\Lambda^{aus}\| \|\chi_\Lambda^{aus} (H^{\Lambda'} - E)^{-1} \chi_A\|.$$

Die Multiskalen-Analyse beruht auf zwei Ideen:

- (1.) Aus der Aussage  $\mathbf{IA}(\mathbf{I}, l, \gamma, \xi)$  folgert man  $\mathbf{IA}(\mathbf{I}, L, \gamma_L, \xi)$ , wobei  $L$  eine viel größere Skala als  $l$  ist und die beiden Exponenten  $\gamma$  und  $\gamma_L$  ungefähr übereinstimmen. (Siehe Proposition 2.2.8). Dabei kommt der geometrischen Resolventen-Ungleichung eine entscheidende Rolle zu.
- (2.) Schritt (1.) iteriert man für eine Folge von Skalen  $l_k \nearrow \infty, k \in \mathbb{N}$ . Gewisse Bedingungen an die Anfangsparameter und eine sorgfältige Kontrolle der Exponenten ergeben, daß für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Aussage  $\mathbf{IA}(\mathbf{I}, l_k, \gamma, \xi)$  mit  $\gamma$  und  $\xi$  unabhängig von  $k$  gilt. (Siehe Korollar 2.2.9)

**Proposition 2.2.8**

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $\xi_0, \tilde{\beta} > 0$ . Die schwache Wegner-Abschätzung  $\mathbf{SWA}(\mathbf{E})$  gelte für alle  $E$  aus einer Umgebung von  $I$ . Man wähle  $\zeta \in ]1, 2[$  so, daß

$$4d \frac{\zeta - 1}{2 - \zeta} \leq \min \left( \xi_0, \frac{1}{4} \right) \quad (2.32)$$

ist. Dann existiert eine Skala  $l_0 = l_0(d, \xi_0, \tilde{\beta}, \zeta)$  so, daß für  $l \geq l_0, l \in 2\mathbb{N} + 1$  und  $\gamma_l \geq l^{\tilde{\beta}-1}$

$$\mathbf{IA}(\mathbf{I}, l, \gamma_l, \xi_0) \implies \mathbf{IA}(\mathbf{I}, L, \gamma_L, \xi) \quad (2.33)$$

gilt. Dabei sind die Relationen

$$(i) \quad l^\zeta \leq L \leq l^\zeta + 6, L \in 2\mathbb{N} + 1$$

$$(ii) \quad \xi \geq \min \left( \xi_0, \frac{1}{4} \right)$$

$$(iii) \quad \gamma_L \geq \gamma(1 - 8l^{1-\zeta}) - \text{const } l^{-1} - 6l^{\zeta(1-\tilde{\beta}/4)} \geq L^{\tilde{\beta}-1}$$

erfüllt.

**Beweisstrategie:**

Es gilt,  $\mathbf{IA}(\mathbf{I}, L, \gamma_L, \xi)$  zu beweisen: Für den überwiegenden Anteil der Konfigurationen  $\omega$  sollen Würfel der Kantenlänge  $L$   $(\gamma_L, \mathbf{E})$ -gut sein.

- (1.) Wir betrachten ein festes  $E \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \Omega$  und ohne Einschränkung  $x = 0$ . Seien zunächst sämtliche Würfel der Kantenlänge  $l$  mit Mittelpunkt in  $\mathbb{Z}^d \cap \Lambda_L$   $(\gamma_l, \mathbf{E})$ -gut. Sei  $x_0 \in \mathbb{Z}^d \cap \Lambda_L^{\text{in}}$  und

$$\chi^{\text{in}} = \chi_{\Lambda_l + x_0}^{\text{in}} \quad (2.34)$$

$$\chi^{\text{aus}} = \chi_{\Lambda_l + x_0}^{\text{aus}} \quad \chi_L^{\text{aus}} = \chi_{\Lambda_L}^{\text{aus}} \quad (2.35)$$

sowie

$$R^l = (H_\omega^{\Lambda_l + x_0} - E)^{-1} \quad R^L = (H_\omega^{\Lambda_L} - E)^{-1} \quad (2.36)$$

Dann impliziert die geometrische Resolventen-Ungleichung

$$\|\chi_L^{aus} R^L \chi^{in}\| \leq C \|\chi_L^{aus} R^L \chi^{aus}\| \|\chi^{aus} R^l \chi^{in}\|.$$

Gemäß Annahme ist  $\Lambda_l + x_0$   $(\gamma_l, \mathbf{E})$ -gut und somit

$$\|\chi_L^{aus} R^L \chi^{in}\| \leq C e^{-\gamma_l l} \|\chi_L^{aus} R^L \chi^{aus}\|. \quad (2.37)$$

Man findet Punkte  $z_1, \dots, z_{3^d}$  in  $\mathbb{Z}^d$ , so daß die Würfel

$$\Lambda_l^{in} + z_i = \Lambda_{l/3} + z_i, \quad i = 1, \dots, 3^d$$

die Menge

$$\Lambda_l^{aus} + x_0 \quad (2.38)$$

überdecken. Wegen der Form der Menge (2.38) kann man den Abstand zwischen  $x_0$  und  $z_i$  für  $i = 1, \dots, 3^d$  gleich  $l/3$  wählen. Es folgt

$$\|\chi_L^{aus} R^L \chi^{aus}\| \leq \sum_{i=1}^{3^d} \|\chi_L^{aus} R^L \chi_{\Lambda_l + z_i}^{in}\|. \quad (2.39)$$

Unter den Punkten  $z_1, \dots, z_{3^d}$  befindet sich einer — nennen wir ihn  $x_1$  — so, daß

$$\|\chi_L^{aus} R^L \chi_{\Lambda_l + z_i}^{in}\| \leq \|\chi_L^{aus} R^L \chi_{\Lambda_l + x_1}^{in}\|, \quad i = 1, \dots, 3^d \quad (2.40)$$

ist. Die Ungleichungen (2.37), (2.39) und (2.40) ergeben zusammen

$$\|\chi_L^{aus} R^L \chi_{\Lambda_l + x_0}^{in}\| \leq C 3^d e^{-\gamma_l l} \|\chi_L^{aus} R^L \chi_{\Lambda_l + x_1}^{in}\|. \quad (2.41)$$

Der letzte Faktor auf der rechten Seite von (2.41) stimmt mit der linken Seite überein, nur daß statt  $x_0$  der Punkt  $x_1$  auftritt. Daher kann man diese Ungleichung iterativ anwenden. Man erhält eine Folge von Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_n$  und die Abschätzung

$$\|\chi_L^{aus} R^L \chi^{in}\| \leq C^n 3^{dn} e^{-\gamma_l ln} \|\chi_L^{aus} R^L \chi_{\Lambda_l + x_n}^{in}\|. \quad (2.42)$$

Wegen  $x_0 \in \Lambda_L^{in}$  kann man mindestens

$$n_{\min} \approx \frac{L}{l} \approx \frac{L/3 - 2}{l/3} = \frac{\text{Abstand von } \Lambda_L^{in} \text{ zu } \Lambda_L^{aus}}{\text{Schrittweite} = \|x_{k+1} - x_k\|_\infty}$$

Iterations-Schritte ausführen, bis man an den Rand von  $\Lambda_L$  stößt. Daher gilt

$$e^{-\gamma_l ln} \approx e^{-\gamma_l L}$$

und (2.42) kann man als

$$\|\chi_L^{aus} R^L \chi^{in}\| \leq e^{-\tilde{\gamma}ln} \|\chi_L^{aus} R^L \chi_{\Lambda_l+x_1}^{in}\|. \quad (2.43)$$

schreiben. Dabei ist

$$\tilde{\gamma} = \gamma_l - \text{Fehlerterm}. \quad (2.44)$$

Um zu einer Schranke an

$$\|\chi_L^{aus} R^L \chi_L^{in}\|$$

zu gelangen, zerlegt man  $\Lambda_L^{in}$  in Würfel  $\Lambda_l^{in} + x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{Z}^d \cap \Lambda_L^{in}$ . Die Anzahl dieser Würfel ist  $(L/l)^d$ . Der Logarithmus dieses Faktors wird in den Fehlerterm in (2.44) subsummiert.

Die Wahrscheinlichkeit, daß *alle*  $\Lambda_l + z$  Würfel mit Mittelpunkt in  $\mathbb{Z}^d \cap \Lambda_L$   $(\gamma_l, \mathbf{E})$ -gut sind, ist zu klein, um  $\mathbf{IA}(\mathbf{I}, l, \gamma_l, \xi_0)$  folgern zu können. Deshalb muß man die Existenz von einigen  $(\gamma_l, \mathbf{E})$ -schlechten Würfel zulassen. Im nächsten Punkt (2.) erläutern wir, wie die Argumentation in diesem Fall angepaßt wird.

- (2.) Wir lassen die Existenz von  $(\gamma_l, \mathbf{E})$ -schlechten Würfeln  $\Lambda_l + z$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d \cap \Lambda_L$  zu. Für diese nehmen wir zumindest eine schwächere Bedingung an:

$$d(\sigma(H_\omega^{\Lambda_l+z}), E) > \epsilon. \quad (2.45)$$

Einen Würfel, der (2.45) erfüllt, nennt man  $\epsilon$ -nicht-resonant oder schlicht *nicht-resonant*. Für die Resolvente jedes  $\epsilon$ -nicht-resonanten  $\Lambda_l + z$  gilt

$$\|(H_\omega^{\Lambda_l+z} - E)^{-1}\| \leq \epsilon^{-1}.$$

$\epsilon = \epsilon(l)$  wird in geeigneter Weise als Funktion von  $l$  gewählt. Unter der Annahme, daß es nur wenige  $(\gamma_l, \mathbf{E})$ -schlechte Würfel  $\Lambda_l + z$  in  $\Lambda_L$  gibt, bleibt die Mindestanzahl der  $(\gamma_l, \mathbf{E})$ -guten Iterations-Schritte in (1.) von der Größenordnung  $n_{\min} \approx L/l$ . Wenn  $\Lambda_L$  nicht-resonant ist, ist der Faktor

$$\|\chi_L^{aus} R^L \chi_{\Lambda_l+x_1}^{in}\|$$

aus (2.42) durch  $\epsilon(L)^{-1}$  beschränkt. Die sorgfältige Kontrolle der Fehlerterme zeigt, daß

$$\|\chi_L^{aus} R^L \chi_L^{in}\| \leq e^{-\gamma_L L}$$

gilt und  $\gamma_L$  der Ungleichung in der Aussage (iii) der Proposition gehorcht.

- (3.) Die  $(\gamma_l, \mathbf{E})$ -Güte und die Nicht-Resonanz von Würfeln sind Eigenschaften, die vom Zufall abhängen. Daher gilt es, die Wahrscheinlichkeit, daß

- (a) nur wenige  $\Lambda_l + z, z \in \mathbb{Z}^d \cap L_L$  ( $\gamma_l, \mathbf{E}$ )-schlecht sind
- (b) diese zumindest nicht-resonant sind und
- (c)  $\Lambda_L$  selbst nicht resonant ist

von unten abzuschätzen. Falls alle drei Bedingungen gelten, kann man wie in Punkt (2.) vorgehen. Man zeigt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß (a), (b) und (c) erfüllt sind, größer oder gleich  $1 - l^{-2\xi}$  ist. Dabei erfüllt  $\xi$  die Bedingung (ii) aus der Aussage der Proposition. Die Wegner-Abschätzung wird benutzt, um zu zeigen, daß resonante Würfel mit großer Wahrscheinlichkeit *nicht* vorkommen.

Bei der technischen Implementierung der Multiskalen-Analyse müssen einige Details modifiziert werden. So werden die Würfel-Mittelpunkte  $z$  nicht aus  $\mathbb{Z}^d \cap \Lambda_L$  sondern  $(\frac{l}{3}\mathbb{Z})^d \cap \Lambda_L$  gewählt. Die Menge  $(\frac{l}{3}\mathbb{Z})^d \cap \Lambda_L$  ist kleiner, und daher ist es einfacher zu gewährleisten, daß die meisten Würfel  $\Lambda_l + z$  ( $\gamma_l, \mathbf{E}$ )-gut sind.

In Punkt (a) gilt es zu präzisieren, wie viele ( $\gamma_l, \mathbf{E}$ )-schlechte Würfel erlaubt sind. Dies hängt von der Variante der Multiskalen-Analyse ab. So werden z.B. im Beweis von Theorem 3.2.2 in [Sto] vier schlechte Würfel zugelassen. Bei anderen Versionen ist die Anzahl dimensionsabhängig gewählt.

Bei der Resonanz-Bedingung wählt man die  $l$ -Abhängigkeit von  $\epsilon$  meist als

$$\epsilon(l) = e^{-l^{1/2}} \quad \text{oder} \quad \epsilon(l) = e^{-l^{1/4}}.$$

Aus kombinatorischen Gründen ist es leichter zu zeigen, daß für  $\Lambda_L + x$  oder für  $\Lambda_L + y$  die Bedingungen (a), (b) und (c) erfüllt sind. So erklärt sich die Alternative in der Formulierung der Bedingung  $\mathbf{IA}(\mathbf{I}, l_1, \gamma, \xi_0)$ .

**q.e.d.**

Wie schon erwähnt, besteht die Multiskalen-Analyse darin, Proposition 2.2.8 iterativ anzuwenden.

### Korollar 2.2.9

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $\xi_0, \tilde{\beta} > 0$ . Die schwache Wegner-Abschätzung  $\mathbf{SWA}(\mathbf{E})$  gelte für alle  $E$  in einer Umgebung von  $I$ . Man wähle  $\xi = \min(\xi_0, \frac{1}{4})$  und  $\zeta \in ]1, 2[$  so, daß

$$4d \frac{\zeta - 1}{2 - \zeta} \leq \min\left(\xi_0, \frac{1}{4}\right)$$

ist. Dann existiert eine Skala  $l^* = l^*(d, \xi_0, \tilde{\beta}, \zeta)$  so, daß für  $l_1 \geq l^*, l_1 \in 2\mathbb{N} + 1$  und  $\gamma \geq l_1^{1-\tilde{\beta}}$

$$\mathbf{IA}(\mathbf{I}, l_1, \gamma, \xi_0) \implies \mathbf{IA}(\mathbf{I}, l_k, \gamma_\infty, \xi) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.46)$$

gilt. Dabei ist  $\gamma_\infty > 0$  und für die Folge von Skalen  $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gilt

$$l_k^\zeta \leq l_{k+1} \leq l_k^\zeta + 6.$$

**Zum Beweis:**

Im Induktionsschritt in Proposition 2.2.8 verringert sich die Masse des exponentiellen Abfalls, anders gesagt  $\gamma_L$  liegt näher an Null als  $\gamma_l$ . Angewandt auf die Folge  $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  bedeutet das: Je größer die Skala  $l_k$ , desto kleiner ist der Exponent  $\gamma_{l_k}$ . Damit im Limes  $k \rightarrow \infty$  überhaupt ein exponentieller Abfall übrig bleibt, muß

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (\gamma_{l_k} - \gamma_{l_{k+1}}) < \gamma_0$$

gelten. Um dies nachzurechnen, benutzt man die Eigenschaften (i) und (iii) in Proposition 2.2.8. Hierdurch erklärt sich die Notwendigkeit den Parameter  $\zeta$  gemäß (2.32) zu wählen.

**q.e.d.**

Nachdem die Multiskalen-Analyse durchgeführt wurde, stehen Abschätzungen für die Resolvente von  $H_\omega$  eingeschränkt auf beliebig große Würfel zu Verfügung.

**Proposition 2.2.10**

Sei  $I$  ein kompaktes Intervall,  $\tilde{\beta}, \gamma_\infty > 0, \xi \in ]0, 1/4]$  und  $\zeta$  so, daß

$$4d \frac{\zeta - 1}{2 - \zeta} \leq \min \left( \xi_0, \frac{1}{4} \right)$$

ist. Die schwache Wegner-Abschätzung **SWA**( $\mathbf{E}$ ) gelte für alle  $E$  in einer Umgebung von  $I$ . Sei  $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Skalen, die

- $l_k^\zeta \leq l_{k+1} \leq l_k^\zeta + 6$  und
- **IA**( $I, l_k, \gamma_\infty, \xi$ )

für alle  $k \in \mathbb{N}$  erfüllt. Dann besitzt  $H_\omega$  im Intervall  $I$  fast sicher reines Punktspektrum, und die zugehörigen Eigenfunktionen fallen exponentiell ab.

**Beweisidee:**

Sei  $\nu$  ein Spektralmaß von  $H_\omega$ . Aus [Ber68] oder Abschnitt C.5 von [Sim82] wissen wir, daß zu  $\nu$ -fast jeder Energie eine polynomial beschränkte Eigenfunktion  $\Psi$  existiert. Mit Hilfe eines Gegenstücks der geometrischen Resolventen-Ungleichung für Eigenfunktionen kombiniert man den exponentielle Abfall der

Resonante mit dem höchstens polynomialen Wachstum von  $\Psi$ . Es folgt, daß  $\Psi$  ein echter Eigenvektor in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  ist und exponentiell abfällt im Raum. Die Schranken werden zunächst in einer lokalen  $L^2$ -Norm erzielt. Der punktweise Abfall folgt mit einem „subsolution estimate“, vgl. [GT83] oder Theorem 2.4 von [CFKS87].

**q.e.d.**

Korollar 2.2.9 und Proposition 2.2.10 liefern zusammen einen Lokalisierungs-Beweis.

**Theorem 2.2.11**

Sei  $E_0$  eine spektrale Kante von  $H_\omega$  und das Intervall  $I$  wie in (2.29). Die schwache Wegner-Abschätzung **SWA(E)** gelte für alle  $E$  in einer Umgebung von  $I$ . Sei  $l_0$  eine Längenskala, so daß für alle  $l \in 2\mathbb{N} + 1$  mit  $l \geq l_0$  die Anfangsskalen-Bedingung für die Energie  $E_0$  erfüllt ist. Dann besitzt  $H_\omega$  in  $I$  fast sicher reines Punktspektrum. Eigenfunktionen zu Eigenwerten in  $I$  fallen fast sicher im Raum  $\mathbb{R}^d$  exponentiell ab.

In dem Theorem kann man die Bedingung  $l \in 2\mathbb{N} + 1$  durch  $l \in 2\mathbb{N}$  ersetzen.

**Bemerkung 2.2.12 (Beweis von 2.1.4, 2.1.10 und 2.1.11)**

Die Resultate 2.1.4, 2.1.10 und 2.1.11 zur Anderson-Lokalisierung bei Legierungs-Modellen folgen nun aus Theorem 2.2.11, sobald man die Voraussetzungen nachgeprüft hat. Diese sind durch unsere technischen Ergebnisse 2.1.9 und 2.1.12 gegeben.

- (i) **Beweis von Theorem 2.1.4:** Die Anfangsskalen-Bedingung stellt Satz 2.1.9 bereit, als schwache Wegner-Abschätzung benutzt man Theorem 3.1 von [KSS98b]. Man könnte auch die Wegner-Abschätzung 2.1.12 aus dieser Arbeit mit  $\alpha_k \geq 0 \forall k$  benutzen. Dann ist allerdings die Klasse der Legierungs-Potentiale  $V_\omega$ , für die das Resultat gilt, etwas kleiner.
- (ii) **Beweis der Theoreme 2.1.10 und 2.1.11:** Die schwache Wegner-Abschätzung liefert Theorem 2.1.12, die Anfangsskalen-Bedingung Korollar 5.1.6 bzw. 5.2.1.
- (iii) **Lokalisierungs-Resultat im Fall indefiniter Einzelplatz-Potentiale und gleichverteilter Kopplungskonstanten unter Verwendung von Satz 2.1.17 und Bemerkung 2.1.18:** Man gehe wie in (ii) vor, jedoch wähle man als schwache Wegner-Abschätzung Satz 2.1.17 bzw. Bemerkung 2.1.18.
- (iv) **Lokalisierungs-Resultat für das diskrete Anderson-Modell mit indefiniten Einzelplatz-Potentialen unter Verwendung von Theo-**

**rem 2.1.19:** Theorem 2.1 in dem Artikel [vDK89] stellt für den diskreten Schrödinger-Operator  $h_\omega$  ein ähnliches Resultat zu Verfügung wie das obige Theorem 2.2.11. Als Anfangsskalen-Bedingung kann man z.B. die Proposition A.1.1 aus der eben zitierten Arbeit verwenden. Die schwache Wegner-Abschätzung stellt Theorem 2.1.19 bereit.

## 2.3 Bisherige Resultate zur Lokalisierung

Andersons Arbeit [And58] über zufällige Schrödinger-Operatoren auf einem Gitter war der Ursprung einer ganzen Reihe von Publikationen in der physikalischen und mathematischen Literatur. Diese beschäftigten sich mit der Untersuchung der Transporteigenschaften ungeordneter quantenmechanischer Systeme. Die Transporteigenschaften lassen sich auf mehrere Arten beschreiben, z.B. indem man die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit von Elektronen-Wellenpaketen im ungeordneten Medium abschätzt. Dies führt zum Begriff der dynamischen Lokalisierung [GDB98, Sto].

Die mathematische Literatur beschäftigt sich vor allem mit der *exponentiellen* oder *Anderson-Lokalisierung*. Diese bedeutet, daß der zufällige Operator in bestimmten Energiebereichen fast sicher reines Punktspektrum aufweist und die Eigenfunktionen zu Eigenwerten in diesen Energiebereichen (fast sicher) exponentiell abfallen im Raum. Erstmals wurde dieses Resultat mathematisch rigoros in [GMP77] für einen speziellen, eindimensionalen Schrödinger-Operator bewiesen. Dabei spielten Techniken aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen eine wesentliche Rolle, weshalb auch die weiteren Untersuchungen zunächst auf eindimensionale Modelle beschränkt blieben [KS80, Mol81, Car82].

Den Zugang zu mehrdimensionalen Modellen verschaffte die Multiskalen-Technik aus der Arbeit [FS83]. Die Ideen und Beweise aus dieser Arbeit wurden in [MS85, FMSS85, DLS85, SW86, vD87, Spe88] und [vDK89] verfeinert. Am Ende dieser Entwicklung stand der Lokalisierungs-Beweis für eine Klasse von zufälligen, diskretisierten Schrödinger-Operatoren. Da sie den in [And58] betrachteten Objekten ähnlich sind, nannte man sie Anderson-Modelle. In diesen Arbeiten befindet sich das Energieintervall, für welches exponentielle Lokalisierung nachgewiesen wird, am Infimum des Spektrums<sup>2, 3</sup>.

Bei allen Arbeiten zu mehrdimensionalen Modellen wird die sogenannte Wegner-Abschätzung verwendet, die auf den Artikel [Weg81] zurückgeht.

---

<sup>2</sup>oder Supremum — beim Spektrum des diskreten Laplace-Operators sind diese beiden äquivalent

<sup>3</sup>Für diskrete Modelle steht als Alternative die Methode von Aizenmann und Molchanov zu Verfügung [AM93, Aiz94, DMP99, Hun00].



In [MH84, CH94, Klo95b, Kir96, BCH97, KSS98b, KSS98a, Zen99] folgte die Anpassung der Resultate für das Legierungs-Modell auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , das Analogon des Anderson-Modells auf  $l^2(\mathbb{Z}^d)$ . Der betrachtete Operator setzt sich aus einem periodischen Schrödinger-Operator  $H_0$  und einem Legierungs-Potential  $V_\omega$  zusammen. Bei all diesen Arbeiten wird angenommen, daß das Einzelplatz-Potential des Legierungs-Potentials nicht-negativ ist, vgl. die Annahme 2.1.B (i). Exponentielle Lokalisierung wird für ein Energieintervall beim Infimum des Spektrums oder bei inneren spektralen Kanten bewiesen. Im Fall der inneren spektralen Kanten wird eine zusätzliche Bedingung an die zufälligen Kopplungskonstanten wie in 2.1.E gestellt. Für diese rein technische Bedingung gibt es keine physikalische Motivation.

Kapitel 3 dieser Arbeit bzw. [Ves98] ist das erste Resultat zur Lokalisierung an inneren spektralen Rändern bei mehrdimensionalen Modellen ohne diese zusätzliche Annahme an die Unordnung. Allerdings setzen wir voraus, daß die betrachtete spektrale Kante von  $\sigma(H_\omega)$  die Perturbation eines Floquet-regulären Randes der Spektrums des ungestörten, periodischen Operators  $H_0$  ist, vgl. Definition 3.3.1. Dies ist eine Eigenschaft von periodischen Schrödinger-Operatoren, die von Physikern allgemein angenommen wird. Klopp und Ralston haben in [KR00] bewiesen, daß sie generisch in der Klasse der Schrödinger-Operatoren gilt, vgl. Korollar 2.1.8.

Kürzlich hat Najjar [Naj] Analoga der Resultate in [Klo99] und [Ves98] bewiesen, welche sich auf zufällige Operatoren beziehen, die klassischen Bewegungsgleichungen für Wellen entsprechen.

Wir beschreiben nun Resultate, die auch Einzelplatz-Potentiale zulassen, die das Vorzeichen wechseln. Wiederum ist die Situation für eindimensionale Modelle besonders klar: Stolz zeigt in [Stz99] mit Hilfe der Techniken aus [BS98], daß das Legierungs-Modell auf der gesamten reellen Achse reines Punktspektrum aufweist. Es werden keine Voraussetzungen an das Vorzeichen des Einzelplatz-Potentials gestellt.

Klopp beweist in [Klo95c] eine Wegner-Abschätzung für Energien in der Nähe des Infimums von  $H_\omega$  ohne Vorzeichen-Voraussetzung an das Einzelplatz-Potential. Sein Ergebnis gilt für alle Raumdimensionen  $d$ . Dieses Resultat nutzt Klopp, um ein Lokalisierungs-Theorem zu beweisen; dafür ist, wie wir oben erwähnt haben, noch eine Anfangsskalen-Abschätzung notwendig. Diese leitet Klopp aus der Lifschitz-Asymptotik der integrierten Zustandsdichte am Infimum des Spektrums her, siehe die Diskussion in Abschnitt 3.2. Allerdings ist bisher diese Asymptotik ausschließlich für Legierungs-Modelle mit nicht-

negativen Einzelplatz-Potentialen bewiesen worden.

[Klo95c] beinhaltet weitere Resultate für Modelle mit zufällige Kopplungskonstanten, die die ganze reelle Achse als Wertebereich haben. Diese sind nicht direkt mit denen in dieser Arbeit vergleichbar. In diesem Setting ist eine spezielle Annahme über die Asymptotik der integrierten Zustandsdichte nicht notwendig und Klopps Wegner-Lemma führt zu einem vollständigen Beweis der Lokalisierung bei negativen Energien.

Unsere Beweise, die Legierungs-Modelle mit indefiniten Einzelplatz-Potentialen  $u$  betreffen, haben im Vergleich zu [Klo95c] und [Stz99] den Nachteil, daß sie für  $u$  eine Treppenform verlangen, vgl. Annahme 2.1.C. Der Vorteil ist, daß unsere Techniken unabhängig sind von der Raumdimension und dem Energiebereich für den man sich interessiert. Im Gegensatz zu [Klo95c] können wir auch Lokalisierung an inneren spektralen Kanten beweisen. Zudem setzen wir bei der Herleitung der Anfangsskalen-Abschätzung im Abschnitt 5 keine Lifschitz-Tails voraus. Unser Lokalisierungs-Beweis ist in sich abgeschlossen und bedarf keiner weitere Bausteine, die plausibel, aber noch nicht bewiesen sind.

Mit unseren Beweistechniken kann man zeigen, daß die integrierte Zustandsdichte Lipschitz-stetig ist, siehe Theorem 2.1.12 und Korollar 2.1.15. Daraus folgt die Existenz der *Zustandsdichte*. Vom physikalischen Standpunkt ist diese Größe viel interessanter als die integrierte Zustandsdichte, da sie die *lokale* Verteilung der Eigenwerte auf der Energieachse beschreibt. Bisher wurden für Legierungs-Modelle mit indefiniten Einzelplatz-Potentialen keine vergleichbaren Resultate erzielt, vgl. jedoch [FHLM97], welches sich auf einen Schrödinger-Operator mit zufälligem Gaußschen Feld als Potential bezieht.

## Kapitel 3

# Lokalisierung an spektralen Kanten

Dieses Kapitel ist dem Beweis von Satz 2.1.9 gewidmet. Letzterer geht als Induktionsanfang der Multiskalen-Analyse in den Beweis von Theorem 2.2.11 ein. Wir beweisen sogar eine etwas allgemeinere Form von Satz 2.1.9.

### **Annahme 3.0.A (Allgemeinere Annahmen für Satz 2.1.9)**

Wir nehmen an, daß der Operator  $H_\omega$  die Annahmen 2.1.A und 2.1.B erfüllt. Jedoch schwächen wir die Bedingung 2.1.A (ii) an das Legierungs-Potential ab, indem wir für das Einzelplatz-Potential nur exponentiellen Abfall im  $L^p$ -Sinne verlangen:

Es existieren  $0 < \delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3 < \infty$ , so daß

$$u \geq \delta_1 \chi_\Lambda, \quad \delta_1 > 0, \quad \text{wobei } \Lambda := \Lambda_{\delta_0} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_\infty < \delta_0/2\}$$

und

$$\|\chi_{\Lambda_1} u(\cdot - k)\|_{L^p} \leq \delta_2 e^{-\delta_3 k}, \quad \delta_2, \delta_3 > 0, \quad p = p(d) \quad (3.1)$$

gelten.

### **Satz 3.0.1**

*Unter der Annahme 3.0.A an das Legierungs-Modell  $H_\omega$  gilt für alle  $q > 0$ :*

*Es existiert eine Skala  $l_0 := l_0(q) \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $l \geq l_0$*

$$\mathbb{P}\{\omega \mid \sigma(H_\omega^{l,\text{per}}) \cap [E, E + l^{-\frac{1}{2}}] \neq \emptyset\} \leq l^{-q} \quad (3.2)$$

*gilt.*

Wie in der Bemerkung 4.2 von [Ves98] erwähnt, kann man die Bedingung an das Einzelplatz-Potential weiter abschwächen und nur genügend schnellen polynomialen Abfall im Unendlichen verlangen. In diesem Fall muß man eine kompliziertere Version der Multiskalen-Analyse, wie sie in [KSS98a] entwickelt wurde, benutzen, um auf Lokalisierung schließen zu können.

### 3.1 Lifschitz-Tails

Eine wichtige Rolle bei dem Beweis von Satz 3.0.1 kommt Klopps Resultat [Klo99] über Lifschitz-Tails an inneren spektralen Kanten zu.

#### Definition 3.1.1

Sei  $E_0$  eine untere Kante von  $\sigma(H_\omega)$ . Falls für die integrierte Zustandsdichte  $N$  von  $H_\omega$

$$\lim_{E \searrow E_0} \frac{\log |\log |N(E) - N(E_0)||}{\log |E - E_0|} = -\frac{d}{2} \quad (3.3)$$

gilt, sagt man, daß  $N$  bei  $E_0$  ein Lifschitz-asymptotisches Verhalten aufweist oder Lifschitz-Tails besitzt.

Das heißt, die integrierte Zustandsdichte verhält sich an der Kante  $E_0$  asymptotisch wie  $c_1 e^{-c_2 |E_0 - E|^{-d/2}}$ ,  $c_1, c_2 > 0$  für Energiewerte  $E$  aus dem Spektrum  $\sigma(H_\omega)$ . Für unsere Beweise ist nur eine obere Schranke an  $N(\cdot)$  von Belang.

#### Theorem 3.1.2 ([Klo99])

Unter den Annahmen 2.1.A und 2.1.B an  $H_\omega$  besitzt die integrierte Zustandsdichte  $N$  bei  $E$  Lifschitz-Tails.

Das Theorem ist eine Verallgemeinerung der Ergebnisse in [KS86] und [Mez93], die das Infimum des Spektrums bzw. den eindimensionalen Schrödinger-Operator betreffen.

### 3.2 Darlegung der Problematik

Wir wollen darlegen, welche Rolle die Lifschitz-Asymptotik der integrierte Zustandsdichte für die Anfangsskalen-Abschätzung spielt. Die folgenden Überlegungen geben nur die Argumentationslinie wieder, die mathematisch korrekt ausgearbeiteten Beweise findet man in den folgenden Abschnitten. Wir betrachten den einfachsten Fall, bei dem die spektrale Kante  $E_0$  das Infimum des Spektrums von  $H_\omega$  ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man  $E_0 = 0$  annehmen, da die Addition einer Konstante  $-E_0$  zu dem Operator  $H_\omega$  das Spektrum  $\sigma(H_\omega)$  um  $-E_0$  verschiebt. Wir rufen nochmal in Erinnerung, daß im dem gesamten vorliegenden Kapitel 3 das Einzelplatz-Potential  $u$  nichtnegativ ist.

Die Lifschitz-Asymptotik besagt, daß es in dem zufälligen System  $H_\omega$  wenig Zustände mit Energien nahe bei 0 gibt. Auf einer endlichen Skala  $l$  sollte das implizieren, daß nur mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit Eigenwerte von  $H_\omega^l$  in die Nähe von 0 fallen. Falls der Abstand zwischen 0 und den Eigenwerten genügend groß ist, so daß er die Bedingung aus Bemerkung 2.2.2 erfüllt, haben

wir eine brauchbare Anfangsskalen-Abschätzung. Nun folgen etwas detailliertere Ausführungen, wie man diese Idee technisch implementiert. Darauf gehen wir auf die Problematik ein, die zusätzlich auftaucht, falls  $E_0$  eine *innere* spektrale Kante ist.

Für den Nachweis der Lifschitz-Tails ist eine Familie von Abschätzungen an den untersten Neumann-Eigenwert  $E_1(H_\omega^{l,N})$  entscheidend [KM83a, KS86]:

$$\mathbb{P}\{E_1(H_\omega^{l,N}) \geq E\} \geq 1 - e^{-cl^d}, \quad l \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

für  $l = CE^{-\frac{1}{2}}$ , wobei  $c$  und  $C$  geeignete, positive Konstanten sind. Wegen  $0 = \inf \sigma(H_\omega)$  impliziert  $E_1(H_\omega^{l,N}) \geq E$  schon

$$d(\inf \sigma(H_\omega), \sigma(H_\omega^{l,N})) \geq E.$$

Zwei technische Schwierigkeiten sind zu bewältigen:

- (i) Wir beweisen in Satz 3.0.1 eine Aussage über das Spektrum der Einschränkung von  $H_\omega$  auf einen endlichen Würfel. Dagegen sind in der integrierten Zustandsdichte  $N$  Informationen über  $H_\omega$  selbst enthalten.
- (ii) Der Würfel  $\Lambda_l$  und damit der Operator  $H_\omega^l$  ist durch die Längenskala  $l$  charakterisiert. Für die Ausnützung der Combes-Thomas Technik aus Proposition 2.2.1 muß die richtige Relation

$$r \gg l^{-2}$$

zwischen der Energieskala  $r = d(0, \sigma(H_\omega^l))$  und der Längenskala  $l$  gelten, vgl. Bemerkung 2.2.2.

Zur Lösung von (i) kann man nicht geradewegs die Aussage (3.4) verwenden, weil die Energie-Längen Beziehung die falsche ist. Wir haben also zwei „konkurrierende“ Längenskalen:

- die kleinere Skala  $l \approx E^{-\frac{1}{2}}$  aus (3.4) und
- die größere Skala  $L \approx E^{-\frac{1}{\beta}}$ ,  $0 < \beta < 2$  aus Bemerkung 2.2.2.

Abhilfe verschafft die Charakterisierung (1.13) von  $N$  als Supremum der integrierten Zustandsdichte auf endlichen Würfeln. Sie und die Lifschitz-Asymptotik implizieren

$$L^{-d} \mathbb{P}\{\omega \mid E_1(H_\omega^{L,D}) \leq E\} \leq \mathbb{E} N_\omega^{L,D}(E) \leq N(E) \approx c_1 e^{-c_2 |E_0 - E|^{-d/2}}. \quad (3.5)$$

- (a) Da diese Beziehung für alle  $L \in \mathbb{N}$  gilt, kann man z.B.  $L = E^{-1}$  wählen und erzielt damit eine für Proposition 2.2.1 brauchbare Abschätzung. Wesentlich dabei ist, daß *vorher* schon die Lifschitz-Asymptotik im thermodynamischen Limes  $\Lambda_l \rightarrow \mathbb{R}^d$  nachgewiesen worden ist. A posteriori kann man dann die Skala nach dem Kriterium in Punkt (ii) wählen. Dagegen würde die Familie (3.4) von Ungleichungen keine brauchbare Information liefern. Diese Prozedur zur Nutzung der Lifschitz-Tails wurde erstmals in [Klo95c] verwendet, siehe Seite 567.
- (b) Es gibt auch einen alternativen Zugang. Dazu zerlegt man den Würfel  $\Lambda_L$  auf der größeren Skala in kleinere Würfel  $\Lambda_l$

$$\Lambda_L = \bigcup_i \Lambda_l + x_i,$$

wobei die  $x_i$  etwa  $\frac{L^d}{l^d}$  viele geeignete Punkte in  $\Lambda_L$  sind. Für die entsprechenden Operatoren gilt die Ungleichung im Sinne der quadratischen Formen

$$H_\omega^L \geq \bigoplus_i H_\omega^{\Lambda_l + x_i, N}. \quad (3.6)$$

Dies bedeutet, daß durch die Einführung der Neumann-Flächen im Würfel  $\Lambda_L$  die Eigenwerte der Operators gesenkt wurden, d.h. im Intervall  $[0, E]$  können es höchstens mehr werden. Man beachte, daß wegen  $\inf \sigma(H_\omega) = 0$  keiner der Operatoren  $H_\omega^L, H_\omega^{\Lambda_l + x_i, N}$  Eigenwerte unterhalb von 0 besitzt. Dann folgt aus (b) folgende Ungleichung für die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}\{E_1(H_\omega^L) \leq l^{-2}\} \approx \left(\frac{L}{l}\right)^d c_1 e^{-c_2 |E_0 - E|^{-d/2}}.$$

Bei geeigneter Wahl der Verhältnisses zwischen  $L$  und  $l$  ergibt sich eine zu (3.5) gleichwertige Abschätzung. Diese Methode findet man genauer auf Seite 116 in Abschnitt 5.1 beschrieben. Sie stammt aus der Proposition 4.2 in dem Artikel [KSS98b]. Eine ähnliche Idee wurde auch in [MH84] verwendet, siehe Formel (3.15).

Ein wesentlicher Unterschied zu dem Zugang (3.5) ist, daß schon die Abschätzungen (3.4) brauchbare Informationen liefern und der Grenzübergang  $L \rightarrow \infty$  nicht notwendig ist.

Falls  $E_0$  eine *innere* spektrale Kante ist, interessiert uns eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Eigenwert von  $H_\omega^L$  in das Intervall  $[E_0 - E, E_0 + E]$  fällt, wobei wieder

$$E \approx L^{-1/\beta}, \quad 0 < \beta < 2$$

gelten muß.

Es scheint schwierig, in dieser Situation Prozedur (b) zu implementieren. Die Zerlegung von  $\Lambda_L$  in kleinere Würfel mit Neumann Randbedingungen senkt die Eigenwerte: es können welche von oben in das Intervall  $[E_0 - E, E_0 + E]$  „hineinrutschen“, aber auch welche unten aus dem Intervall „herausrutschen“. Dies war im Fall  $E_0 = \inf \sigma(H_\omega^L)$  anders, weil unterhalb von  $E_0$  keine Eigenwerte liegen konnten.

Zudem müßte man in dem Beweis von [Klo99] ein Analogon der Abschätzung (3.4) finden. Diese bezöge sich nicht auf  $H_\omega^L$  sondern auf einen diskreten Operator auf  $l^2(\mathbb{Z}^d)$ , der nach mehreren Approximationsschritten erreicht wird.

Auch aus anderen Zusammenhängen [Hem92, Slo97] ist bekannt, daß die Untersuchung von Eigenwerten in spektralen Lücken wesentlich schwieriger ist, als die am unteren Rand des Spektrums, weil es sich um ein indefinites störungstheoretisches Problem handelt.

Die Prozedur (3.5) ist im Fall innerer spektraler Kanten aussichtsreicher. Von den beiden Ungleichungen

$$N(E_0 + E) \geq \mathbb{E} N_\omega^L(E_0 + E) \quad (3.7a)$$

und

$$N(E_0 - E) \geq \mathbb{E} N_\omega^L(E_0 - E) \quad (3.7b)$$

weist zwar nur die erste (3.7a) in die richtige Richtung, während (3.7b) in die falsche weist. Dieses Problem läßt sich jedoch durch ein Approximations-Lemma für die integrierte Zustandsdichte beheben, welches den Fehler

$$|N(E_0 - E) - \mathbb{E} N_\omega^L(E_0 - E)|$$

abschätzt. Auf diese Weise wurde in [Ves96] aus dem Resultat von Mezincescu [Mez93] über innere Lifschitz-Tails beim eindimensionalen Legierungsmodell die Anfangsskalen-Abschätzung der Multiskalen-Analyse und somit ein Lokalisierungs-Theorem gefolgert. Die Ergebnisse in [Mez93] beruhen auf einer Untersuchung der Nullstellen der Eigenfunktionen von  $H_\omega^L$  mit Dirichlet-Randbedingungen. Im höherdimensionalen Fall ist die Untersuchung der Knotenmengen von Dirichlet-Eigenfunktionen viel komplizierter und es ist fraglich, ob sie die gewünschten Informationen liefert<sup>1</sup>. Wir beweisen das benötigte Approximationslemma für die integrierte Zustandsdichte im Abschnitt 3.6 stattdessen mit der von Klopp entwickelten Methode der periodischen Approximationen für den zufälligen Operator  $H_\omega$  und seine integrierte Zustandsdichte.

<sup>1</sup>Siehe jedoch Abschnitt 2 der Dissertation [Kle99] und den Artikel [KS99], wo Knotenmannigfaltigkeiten einer Eigenfunktion im Zusammenhang mit dem Problem der Anderson-Lokalisierung untersucht werden.

Interessanterweise wird sich bei der Herleitung der Anfangsskalen-Abschätzung bei *indefiniten Potentials* in Abschnitt 5.1 herausstellen, daß in diesem Falle nur die Prozedur (b) zum Ziel führt.

### 3.3 Floquet-Theorie

In diesem Abschnitt werden einige Spektraleigenschaften eines  $\mathbb{Z}^d$ -periodischen Schrödinger-Operators mit Hilfe der sogenannten Floquet-Zerlegung beschrieben. Der Einfachheit halber bezeichnen wir hier einen periodischen Operator mit  $H = -\Delta + V$  ohne Indizes.

Periodische Schrödinger-Operatoren haben eine große Symmetriegruppe. Sie sind invariant unter allen Translationen um einen beliebigen Vektor  $k$  aus  $\mathbb{Z}^d$ :

$$HT_k - T_kH = 0, \quad T_k f(x) = f(x - k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d. \quad (3.8)$$

Denn das  $\mathbb{Z}^d$ -periodische Potential ändert sich nicht bei einer Translation um  $k \in \mathbb{Z}^d$  und der Laplace-Operator ist invariant sogar unter sämtlichen Translationen um Vektoren aus  $\mathbb{R}^d$ .

Diese Symmetrie ermöglicht es, die spektralen Eigenschaften von  $H$  näher zu untersuchen. Wir folgen im weiteren der Darlegung in [RS78] und vor allem [Sjö91]. Sei  $\Lambda = [-1/2, 1/2]^d$  eine Einheitszelle des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  und  $\Lambda^* = [-\pi, \pi]^d$  diejenige des dualen Gitters  $2\pi\mathbb{Z}^d = \{\gamma \in \mathbb{R}^d \mid \langle \gamma, k \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}^d\}$ .

Man betrachte den Raum  $L^2(\Lambda)$  und dessen direktes Integral über die duale Zelle

$$\mathcal{H} := \int_{\Lambda^*}^{\oplus} d\theta L^2(\Lambda). \quad (3.9)$$

Die Transformation  $U: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}$

$$(Uf)(x, \theta) := e^{-i\theta x} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\theta k} f(x + k) \quad (3.10)$$

ist unitär. Ihre Inverse bzw. Adjungierte ist gegeben durch  $U^*: \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$

$$(U^*g)(x) := (2\pi)^d \int_{\Lambda^*} e^{i\theta x} g(x, \theta) d\theta. \quad (3.11)$$

Die Abbildung  $U$  nennt man *partielle Fouriertransformation* und den Vektor  $\theta \in \Lambda^*$  *Quasi-Impuls*. Nun ergibt sich die direkte Integralzerlegung des Operators  $H$ :

$$UHU^* = \int_{\Lambda^*}^{\oplus} d\theta H(\theta). \quad (3.12)$$



Der Operator  $H(\theta), \theta \in \Lambda^*$  ist gegeben durch den Differentialausdruck

$$H(\theta) = (-i\nabla + \theta)^2 + V = -\Delta - 2i\theta\nabla + \theta^2 + V \quad (3.13)$$

und ist auf seinem Definitionsbereich  $W_{\text{per}}^{2,2}(\Lambda)$  selbstadjungiert. Man kann die  $H(\theta)$  als Fasern von  $H$  über  $\Lambda^*$  betrachten. Die Darstellung (3.12) wird *Floquet-Zerlegung* eines periodischen Operators genannt.

Die Terme niederer Ordnung  $-2i\theta\nabla + \theta^2 + V$  in (3.13) sind infinitesimal beschränkt bezüglich  $-\Delta$  (auf  $W_{\text{per}}^{2,2}$ ), und  $H(\theta)$  besitzt eine kompakte Resolvente für alle  $\theta \in \Lambda^*$ . Das Spektrum von  $H(\theta)$  ist diskret mit  $+\infty$  als einzigem Häufungspunkt. Wir numerieren die Eigenwerte in aufsteigender Reihenfolge unter Berücksichtigung der Vielfachheiten:

$$E_1(\theta) \leq E_2(\theta) \leq \dots \leq E_n(\theta) \rightarrow +\infty \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Diese werden *Floquet-Eigenwerte* von  $H$  genannt. Sie sind Lipschitz-stetig in  $\theta \in \Lambda^*$ . Es gilt folgende Verschärfung von (3.14)

$$\inf_{\theta \in \Lambda^*} E_n(\theta) \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

und  $E_n(\Lambda^*)$  ist ein (abgeschlossenes) Intervall auf der Energie-Achse. Aus der Zerlegung (3.12) folgt für das Spektrum von  $H$

$$\begin{aligned} \sigma(H) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n(\Lambda^*) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ \inf_{\theta \in \Lambda^*} E_n(\theta), \sup_{\theta \in \Lambda^*} E_n(\theta) \right]. \end{aligned}$$

Unter milden Voraussetzungen an das Potential, die bei uns erfüllt sind, ist das Spektrum von  $H$  rein absolutstetig. Siehe dazu die neuere Forschungsarbeit [She98] und den Übersichtsartikel [Sus00]. Die Menge  $\sigma(H)$  ist in abgeschlossenen Intervallen, sogenannten spektralen Bändern angeordnet. Die Resolventenmenge besteht auf der reellen Achse aus abzählbar vielen offenen Intervallen. Falls

$$\sup_{\theta \in \Lambda^*} E_n(\theta) < \inf_{\theta \in \Lambda^*} E_{n+1}(\theta), \quad (3.16)$$

gilt, so existiert eine offene spektrale Lücke zwischen zwei spektralen Bändern.<sup>2</sup> Andernfalls sprechen wir von einer Überlappung der Bänder, die vom  $n$ -ten und  $(n+1)$ -ten Floquet-Eigenwert erzeugt werden.

Um den Sprachgebrauch zu präzisieren, legen wir nun fest, daß unter einem *Band* eine Zusammenhangskomponente des Spektrums gemeint ist. Das Minimum eines Bandes nennen wir untere, das Maximum obere *spektrale Kante* oder

<sup>2</sup>Man beachte, daß dabei eine geeignete Numerierung der  $E_n(\cdot)$  gewählt werden muß. Diese ist nicht in natürlicher Weise vorgegeben.

*spektraler Rand.* Zu einer unteren spektralen Kante  $E$  existiert (mindestens) ein Bandindex  $n$  und (mindestens) ein Wert des Quasi-Impulses  $\theta_0$ , so daß

$$E = E_n(\theta_0) \quad (3.17)$$

gilt und  $E$  ein globales Minimum der Funktion  $E_n(\cdot)$  ist. Insbesondere verschwindet der Gradient  $\nabla_\theta E_n(\theta)$  bei  $\theta_0$ . Andererseits folgt aus (3.15), daß eine endliche Teilmenge  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(E)$  existiert, so daß aus  $E_n(\theta) = E$  schon  $n \in \mathcal{N}$  folgt.

Die Form der Minima von Floquet-Eigenwerten, welche  $E$  berühren, entscheidet, ob die spektralen Eigenschaften von  $H$  bei der Energie  $E$  ähnlich sind wie diejenigen von  $-\Delta$  bei der Energie 0. Um dies zu erläutern, betrachten wir den negativen Laplace-Operator in der Impulsdarstellung, d.h. die Fourier-Transformation von  $-\Delta$ . Dort ist er ein Multiplikations-Operator  $F(p) = p^2$  auf  $L^2(\mathbb{R}^d, dp)$ . Das Minimum 0 der Funktion  $F$  bei  $p = 0$  ist regulär, d.h. die Hesse-Matrix  $\{\partial_j \partial_k F\}_{j,k=1}^d|_{p=0}$  ist positiv definit. Auf diesem Verhalten beruht Lifschitz' Beschreibung der Asymptotik der integrierte Zustandsdichte, welche auch in der vorliegenden Arbeit eine herausragende Rolle spielt. Siehe dazu die prägnante Beschreibung von Lifschitz' Heuristik in der Einleitung von Simons Artikel [Sim85]. Falls man höhere spektrale Ränder eines periodischen Schrödinger-Operators untersucht, übernimmt der Quasi-Impuls  $\theta$  die Rolle, die beim freien Laplace-Operator der Impuls  $p$  spielt. Es ist also von Interesse, ob die Minima (und Maxima) der Funktionen  $E_n(\cdot)$  quadratisch oder degeneriert sind. Davon hängt ab, ob die integrierte Zustandsdichte des zufälligen Operators  $H_\omega$  an inneren Kanten das selbe Lifschitz-asymptotische Verhalten aufweist, wie am Infimum des Spektrums. Unter „degeneriert“ meinen wir, daß bei der Taylor-Entwicklung von  $E_n(\cdot)$  der quadratische Term verschwindet oder keinen vollen Rang, d.h. Rang =  $d$ , hat. Dies legt die Unterscheidung der Minima der Floquet-Eigenwerte  $E_n(\cdot)$  nach der Regularität ihrer Hesseschen nahe.

### Definition 3.3.1

Sei  $E$  eine untere spektrale Bandkante des periodischen Schrödinger-Operators  $H$ . Einen Floquet-Eigenwert  $E_n(\cdot)$  nennen wir regulär, wenn Konstanten  $C, c \in ]0, \infty[$  existieren, so daß bei jedem Quasi-Impuls  $\theta_0$ , bei dem  $E_n(\cdot)$  den Wert  $E$  annimmt,

$$\frac{1}{C}|\theta_0 - \theta|^2 \leq E_n(\theta) - E \leq C|\theta_0 - \theta|^2 \text{ für alle } \theta, |\theta_0 - \theta| \leq c \quad (3.18)$$

gilt. Falls sämtliche Floquet-Eigenwerte  $E_n(\cdot)$ , die die spektrale Kante  $E$  berühren, regulär sind, nennen wir  $E$  eine Floquet-reguläre spektrale Kante.

Analog ist auch die Floquet-Regularität einer oberen spektrale Kante definiert. Mit der Lipschitz-Stetigkeit der Floquet-Eigenwerte beschäftigen wir uns noch näher in Lemma 3.7.2. Das Infimum des Spektrums von  $H_0$  ist immer eine Floquet-reguläre Kante, siehe Theorem 2.1 in [KS87]. Aus [Eas73] wissen wir, daß *alle* spektralen Ränder Floquet-regulär sind, falls die Raumdimension  $d = 1$  ist. Der Unterschied zwischen regulären und nicht-regulären spektralen Rändern wird auch an dem Verhalten der integrierte Zustandsdichte des periodischen Operators  $H$  deutlich. Folgendes Resultat ist Proposition 1.1 in [Klo99].

**Proposition 3.3.2**

Sei  $N_{\text{per}}$  die integrierte Zustandsdichte des periodischen Operators  $H$  und  $E_0$  eine untere spektrale Kante von  $H$ .  $E_0$  ist genau dann Floquet-regulär, wenn

$$\lim_{E \searrow E_0} \frac{\log(N_{\text{per}}(E) - N_{\text{per}}(E_0))}{\log E} = \frac{d}{2}$$

gilt.<sup>3</sup>

Als weiterführende Literatur zu periodischen Schrödinger-Operatoren sei [Skr84, Skr87, Kar97, HM98] angeführt. In [CdV91] werden Floquet-Eigenwerte eines periodischen Schrödinger-Operators untersucht. Im zweidimensionalen Fall wird für kleine Potentiale nachgewiesen, daß die Floquet-Eigenwerte generisch Morse-Funktionen sind.

### 3.4 Funktionalkalkül mit fast analytischen Funktionen

In diesem Abschnitt führen wir die *Helffer-Sjöstrand Formel* (3.19) ein, die in Abschnitt 3.6 benutzt wird, um ein Approximations-Lemma für die integrierte Zustandsdichte zu beweisen.

Für einen selbstadjungierten Operator  $A$  auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$  und eine komplexwertige, meßbare Funktion  $f$  kann man den Operator  $f(A)$  mit Hilfe des Spektralsatzes definieren. Normalerweise beweist man diesen Satz mit Riesz' Darstellungstheorem für den Dualraum  $C(K)^*$  der stetigen Funktionen auf einem Kompaktum  $K$ , siehe z.B. jeweils das Kapitel VII in den beiden Büchern [RS80, Wer95].

Helffer und Sjöstrand [HS89] bewiesen folgende Darstellungsformel

$$f(A) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(z) (z - A)^{-1} dx dy \quad (3.19)$$

<sup>3</sup>Aufschlußreich ist in diesem Zusammenhang auch die Formel (3.29), die man in [RS78, Shu79] oder [Sjö91] findet.

für glatte Funktionen  $f$  mit kompaktem Träger. Hierbei bezeichnet  $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine *fast analytische Fortsetzung* von  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Davies wählt in dem Buch [Dav95] die Formel (3.19) als Ausgangspunkt, um systematisch ein Funktionalkalkül zu entwickeln<sup>4</sup>. Dort findet man weitere Einzelheiten zu dem Inhalt dieses Abschnitts.

**Definition 3.4.1**

Für ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $f \in C_0^n(\mathbb{R})$  definieren wir eine fast analytische Fortsetzung (der Ordnung  $n$ )  $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\tilde{f}(x, y) := \tilde{f}_n(x, y) := \left( \sum_{r=0}^n f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r!} \right) s(x, y), \quad (3.20)$$

wobei wir die Konvention  $z := x + iy := (x, y) \in \mathbb{C}$  benutzen. Die Abschneidefunktion  $s$  ist gegeben durch

$$s(x, y) := t \left( \frac{y}{\langle x \rangle} \right), \quad t \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

mit  $t(x) = 0$  für  $|x| > 2$ ,  $t(x) = 1$  für  $|x| < 1$ ,  $\|t'\|_\infty \leq 2$  und  $\langle x \rangle := \sqrt{x^2 + 1}$ .

Falls man  $\tilde{f}$  wie in (3.20) wählt, gilt die Helffer-Sjöstrand Formel (3.19).

Für eine Funktion  $f$  mit Träger im Intervall  $[-R, R]$  verschwindet die Fortsetzung  $\tilde{f}$  außerhalb der Menge  $\{z \in \mathbb{C} \mid x \in \text{supp} f, |y| < 2R + 2\}$ . Für die Ableitung von  $\tilde{f}$  nach  $\bar{z}$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}}(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial y} \right) (z) \\ &= \frac{1}{2} f^{(n+1)}(x) \frac{(iy)^n}{n!} s(x, y) + \frac{1}{2} (s_x(x, y) + i s_y(x, y)) \sum_{r=0}^n f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r!}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die Berechnung der partiellen Ableitungen von  $s$  ergibt:

$$|s_x + i s_y| \leq \frac{6}{\langle x \rangle} \chi_{\{\langle x \rangle < |y| < 2\langle x \rangle\}}, \quad (3.22)$$

woraus man abliest, daß sie für  $|y| \leq 1$  verschwinden, da  $\langle x \rangle = \sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ . Aus den beiden Schranken (3.21) und (3.22) folgt

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}}(x, y) \right| \leq \frac{1}{2n!} |f^{(n+1)} s| |y|^n + \frac{3}{\langle x \rangle} \chi_{\{\langle x \rangle < |y| < 2\langle x \rangle\}} \sum_{r=0}^n |f^{(r)}| \frac{|y|^r}{r!} \quad (3.23)$$

In Abschnitt 3.6 werden wir  $f = f_E$  als Näherung zu der charakteristischen Funktion  $\chi_{[0, E]}$  eines Intervalls wählen. Der Träger von  $f_E$  soll in der Menge  $[-\frac{1}{2}E, \frac{3}{2}E]$  liegen und auf  $[0, E]$  mit Eins übereinstimmen.

<sup>4</sup>Dieser ist natürlich äquivalent zu dem oben erwähnten „Standard-Funktionalkalkül“.

Dazu konstruieren wir im nächsten Abschnitt 3.5 explizit solch ein  $f_E \in C_0^n(\mathbb{R})$ , das zusätzlich für alle  $E \in [0, 1]$  die Eigenschaften

$$\|f_E^{(n)}\|_\infty \leq CE^{-n} \text{ und } \|f_E\|_n := \sum_{i=1}^n \|f_E^{(i)}\|_\infty \leq \tilde{C}E^{-n} \quad (3.24)$$

erfüllt. Die Konstanten  $C, \tilde{C}$  hängen von  $n$  ab.

Dabei ist es nötig, auch über die Fortsetzung  $\tilde{f}_E$  von  $f_E$  in die komplexe Ebene möglichst genaue Informationen zu haben. Hierbei zeigt sich die Stärke von Davies' Zugang in [Dav95], weil er explizite Formeln für  $\tilde{f}$  bereitstellt.<sup>5</sup> Siehe dazu die Bemerkungen 3.6.4 und 3.6.7.

### 3.5 Approximierte charakteristische Funktion mit minimaler Ableitung

Zu  $E \in ]0, 1]$  ist eine Funktion  $f \in C^n(\mathbb{R})$  mit folgenden Eigenschaften zu finden

$$\begin{aligned} \text{supp } f &\subset [-E/2, 3E/2], \quad f \equiv 1 \text{ auf } [0, E] \text{ und } f \in [0, 1] \text{ auf } \mathbb{R} \\ \|f^{(n)}\|_\infty &\leq CE^{-n}, \quad \|f\|_n := \sum_{i=0}^n \|f^{(i)}\|_\infty \leq \tilde{C}E^{-n}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die Konstanten  $C, \tilde{C}$  dürfen nur von  $n$  abhängen. Das Problem ist schon gelöst, falls man eine Funktion  $g$  hat, welche auf dem Intervall  $] -\infty, 0]$  konstant gleich Null und auf  $[E, \infty[$  konstant gleich Eins ist, und die Normbedingungen aus (3.25) erfüllt. Durch Translation, Spiegelung und Fallunterscheidung bekommt man aus  $g$  leicht  $f$ .

Desweiteren folgt aus der ersten Ungleichung in (3.25) schon die zweite, denn

$$|g^{(i)}(x)| \leq |g^{(i)}(0)| + \left| \int_0^x g^{(i+1)}(t) dt \right| \leq E \|g^{(i+1)}\|_\infty.$$

Wir konstruieren in Lemma 3.5.1 ein Spline, welches diese Bedingungen erfüllt. Alternativ könnte man  $f$  durch eine Faltung einer charakteristischen Funktion mit einer glatten Approximation der Eins konstruieren.

#### Lemma 3.5.1

Sei  $S := S(E) := \{s_{i,j}\}_{i,j=1}^{n+1}$  die  $(n+1) \times (n+1)$  Matrix mit den Komponenten  $s_{i,j} := \frac{(n+j)!}{(n+1-i+j)!} E^{n+1-i+j}$ ,  $e_1 := (1, 0, \dots, 0)^T$  der erste Vektor der Basis in  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $(a_{n+1}, \dots, a_{2n+1})^T = a := S^{-1}e_1$ . Sei ein Polynom  $(2n+1)$ -ter

<sup>5</sup>Alternativ hätte man auch  $f$  aus der Gevrey-Klasse [Mat71, Cat81] wählen können; vergleiche den Zugang in Abschnitt (IIa) von [Klo95a].

Ordnung gegeben durch  $p(x) := p_E(x) := \sum_{i=n+1}^{2n+1} a_i E^i$  und die Funktion  $g$  durch

$$g(x) := g_E(x) := \begin{cases} 0 & \forall x \in ]-\infty, 0] \\ p(x) & \forall x \in ]0, E[ \\ 1 & \forall x \in [1, \infty[. \end{cases}$$

Dann ist  $g_E \in C^{(n)}(\mathbb{R})$  und die Ableitung erfüllt  $\|g_E^{(n)}\|_\infty \leq CE^{-n}$ .

**Beweis:**

Um die behauptete Differenzierbarkeit von  $g$  zu zeigen, reicht es die Randbedingungen

$$p^{(i)}(0) = 0, \quad p^{(i)}(E) = \delta_{0,i} \quad \forall i = 0, \dots, n+1 \quad (3.26)$$

zu überprüfen. Dies sind zwei Gleichungssysteme mit jeweils  $n+1$  Gleichungen und  $n+1$  Unbekannten. Das erste System liefert sofort, daß die Koeffizienten des Polynoms  $p_E$  zum Grad 0 bis  $n$  gleich Null sind. Wir schreiben das zweite System in Matrixnotation:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} p(E) \\ p'(E) \\ \vdots \\ p^{(n)}(E) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=n+1}^{2n+1} a_i E^i \\ \sum_{i=n+1}^{2n+1} i a_i E^{i-1} \\ \vdots \\ \sum_{i=n+1}^{2n+1} \frac{i!}{(i-n)!} a_i E^{i-n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E^{n+1} & E^{n+2} & \dots & E^{2n+1} \\ (n+1)E^n & (n+2)E^{n+1} & \dots & (2n+1)E^{2n} \\ \frac{(n+1)!}{(n-1)!} E^{n-1} & \frac{(n+2)!}{n!} E^n & \dots & \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} E^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n+1)!E & \frac{(n+2)!}{2!} E^2 & \dots & \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} E^{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ \vdots \\ a_{2n+1} \end{pmatrix} \\ &= Sa = SS^{-1}e_1 = e_1. \quad (3.27) \end{aligned}$$

D.h. bei unserer Wahl des Koeffizientenvektors  $a$  von  $p_E$  sind die Randbedingungen erfüllt. Um die behauptete Normschränke zu beweisen, müssen wir die  $n$ -te Ableitung  $q(x) := q_E(x) := \sum_{i=1}^{n+1} b_i x^i$  des Polynoms  $p_E$  berechnen. Es gilt

$$p^{(k)}(x) = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \frac{i!}{(i-k)!} a_i x^{i-k} = \sum_{i=n+1-k}^{2n+1-k} \frac{(k+i)!}{i!} a_{i+k} x^i.$$

Indem wir  $k = n$  setzen, bekommen wir für die Koeffizienten von  $q$  die Gleichung  $b_i = \frac{(n+i)!}{i!} a_{n+i}$ . Falls wir  $b := (b_1, b_2, \dots, b_{n+1})^T$  definieren, ist  $q(x)$  gleich der Spaltensumme des Vektors

$$\begin{aligned} \beta = D_2 b &= \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= D_2 D_1 a = D_2 \begin{pmatrix} \frac{(n+1)!}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{(n+2)!}{2!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \end{pmatrix} a \\ &= D_2 D_1 S^{-1} e . \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß  $\beta$  die erste Spalte der Inversen von  $SD_1^{-1}D_2^{-1} = \mathcal{E}LRX$  ist. Dabei sind die Faktoren gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \begin{pmatrix} E^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E^{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & E^0 \end{pmatrix} L := \begin{pmatrix} \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{(n+2)!} & \dots & \frac{1}{(2n+1)!} \\ \frac{1}{(n)!} & \frac{1}{(n+1)!} & \dots & \frac{1}{(2n)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n+1)!} \end{pmatrix} \\ R &:= \begin{pmatrix} 1! & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2! & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (n+1)! \end{pmatrix} X := \begin{pmatrix} (\frac{E}{x}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\frac{E}{x})^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\frac{E}{x})^{n+1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Sei  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})^T = \lambda := L^{-1}e$  die erste Spalte von  $L^{-1}$ , dann ergibt sich

$$\sup_{x \in ]0, E[} \beta_i(x) = \frac{\lambda_i}{i!} \sup_{x \in ]0, E[} \left(\frac{x}{E}\right)^i E^{-n} = \frac{\lambda_i}{i!} E^{-n}$$

und somit für die Supremumsnorm von  $q_E$  die Schranke

$$\|q_E\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{n+1} \|\beta_i(x)\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{i!} E^{-n} \leq CE^{-n} ,$$

womit das Lemma bewiesen ist.

**q.e.d.**

### 3.6 Approximations-Lemma für die integrierte Zustandsdichte

In diesem Abschnitt approximieren wir die integrierte Zustandsdichte des ergodischen Operators  $H_\omega$  durch diejenige der *periodischen Näherung*  $H_{L,\omega}$ , die gegeben ist durch

$$H_{L,\omega}(x) := H_0(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_{\tilde{k}} u(x - k), \quad (3.28)$$

wobei  $\tilde{k} := k \bmod (L\mathbb{Z})^d$  ist.  $H_{L,\omega}$  nennen wir auch *periodische Approximation*. Für jedes  $L \in 2\mathbb{N} + 1$  und  $\omega \in \Omega$  handelt es sich um einen  $(L\mathbb{Z})^d$ -periodischen Operator. Wie in Abschnitt 1.3.3 folgert man, daß  $H_{L,\omega}$  eine infinitesimal kleine Störung von  $H_0$  ist, wobei die relativen Schranken uniform in  $L$  und  $\omega$  gewählt werden können.

Da  $H_{L,\omega}$   $(L\mathbb{Z})^d$ -periodisch ist, gilt für dessen integrierte Zustandsdichte die Formel [RS78, Shu79, Sjö91]

$$N_{L,\omega}(E) := N(H_{L,\omega}, E) = (2\pi)^{-d} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Lambda_L^*} \chi_{\{E_n(\theta) < E\}} d\theta. \quad (3.29)$$

Hierbei ist  $E \in \mathbb{R}$  ein Energiewert und  $E_n(\theta)$  der  $n$ -te Eigenwert des Operators  $H_{L,\omega}(\theta)$ , der die Einschränkung von

$$H_{L,\omega} - 2i\theta\nabla + \theta^2$$

auf den Würfel  $\Lambda_L$  mit periodischen Randbedingungen ist, vgl. die Formel (3.13). Die Menge

$$\Lambda_L^* := \left[ \frac{-\pi}{L}, \frac{\pi}{L} \right]^d$$

bezeichnet die Einheitszelle des dualen Gitters  $((L\mathbb{Z})^d)^* = (\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z})^d$ . Unser Resultat zur Approximation der integrierte Zustandsdichte von  $H_\omega$  ist folgender

#### Satz 3.6.1

Sei  $H_\omega$  ein Legierungs-Modell und  $H_{L,\omega}$  dessen periodische Approximation. Bezeichne  $N$  bzw.  $N_{L,\omega}$  deren entsprechende integrierte Zustandsdichten. Dann gilt für jede reellwertige Funktion  $g \in C_0^{n+1}(\mathbb{R})$  mit Träger in  $[-1/2, 1/2]$ :

$$\left| \mathbb{E} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x) dN_{L,\omega}(x) \right) - \int_{\mathbb{R}} g(x) dN(x) \right| \leq \text{const } |\text{supp}g| \|g\|_{n+1} L^{d^2+1-n}$$

für ausreichend großes  $L \in 2\mathbb{N} + 1$ .



Periodische Approximationen wurden schon von Kirsch und Martinelli in [Kir81, KM82c] benutzt, um das Spektrum  $\sigma(H_\omega)$  als Menge zu untersuchen. Insbesondere war dabei die Frage der Existenz von spektralen Lücken, die zur Resolventenmenge gehören, von Interesse. In Abschnitt 5 der Arbeit [Klo99] von Klopp wird ausgenutzt, daß die periodischen  $H_{L,\omega}$  den ursprünglichen Operator  $H_\omega$  besser approximieren, als die Einschränkung von  $H_\omega$  auf einen Würfel mit Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen. Dort findet man weitere Details zu periodischen Approximationen im Zusammenhang mit der integrierte Zustandsdichte und entsprechende Referenzen.

Der Beweis von Satz 3.6.1 gliedert sich in drei Lemmata. Die einführende Bemerkung 3.6.2 und Lemma 3.6.3 entsprechen fast wörtlich dem ersten Teil des Beweises von Theorem 5.1 in [Klo99], der die Konvergenzaussage, aber nicht die Fehlerabschätzung von unserem Satz 3.6.1 beinhaltet. Im weiteren Vorgehen in Lemma 3.6.5 und 3.6.6 benutzen wir die explizite Darstellung der fast analytischen Fortsetzung aus Abschnitt 3.4 um genauere Abschätzungen als in [Klo99] zu erzielen, vgl. Bemerkung 3.6.4.

Wir bezeichnen mit  $\chi^L$  die charakteristische Funktion der Periodizitätszelle  $\Lambda_L := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_\infty \leq L/2\}$  von  $H_{L,\omega}$  und mit  $\chi_\gamma^L(x) := \chi^L(x - \gamma)$  deren Translation um  $\gamma \in \mathbb{Z}^d$ .

### Bemerkung 3.6.2

Da es sich bei  $H_{L,\omega}$  um einen  $(L\mathbb{Z})^d$ -periodischen Operator handelt, gilt für die integrierte Zustandsdichte [Klo99]

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dN_{L,\omega}(x) = L^{-d} (\text{Tr} \chi^L g(H_{L,\omega}) \chi^L). \quad (3.30)$$

Ähnlich gilt auch im  $\mathbb{Z}^d$ -ergodischen Fall [CL90, PF92]

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dN(x) = \mathbb{E} (\text{Tr} \chi^1 g(H_\omega) \chi^1). \quad (3.31)$$

Aus der Zerlegung von  $\Lambda_L$  in Einheitswürfel folgt

$$\chi^L = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |k| < L/2} \chi_k^1.$$

Diese Gleichung, die beiden Formeln (3.30) und (3.31) implizieren

$$\mathbb{E} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x) dN_{L,\omega}(x) \right) = \mathbb{E} (\text{Tr} \chi^1 g(H_{L,\omega}) \chi^1). \quad (3.32)$$

Dabei wurde benutzt, daß die Kopplungskonstanten  $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  unabhängig und identisch verteilt sind. Da  $H_{L,\omega}$  gleichmäßig von unten beschränkt ist, existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so daß

$$\text{Id} \leq \lambda + H_{L,\omega} \text{ und } \text{Id} \leq \lambda + H_\omega \text{ für alle } \omega, L \text{ gilt.}$$

Aus Abschnitt B.9 des Übersichtsartikels [Sim82] von Simon entnehmen wir, daß der Operator  $\chi^L(\lambda + H_{L,\omega})^{-q}$  Spurklasse ist für alle  $q > d/2$  und  $L < \infty$ . Die Proposition 4.3 aus dem Anhang von [Klo95a] besagt, daß für eine von  $\omega$  unabhängige Konstante  $\tilde{C}_1 > 1$

$$\|\chi_\beta^1(z - H_\omega)^{-1}(\lambda + H_\omega)^{-q}\chi^1\|_{\text{Tr}} \leq \frac{\tilde{C}_1}{|y|} \exp(-|y| |\beta|/\tilde{C}_1) \quad (3.33)$$

gilt, falls  $V_\omega$  ein beschränktes Potential ist. Eine leichte Änderung der Beweise in dem Anhang von [Klo95a] ergibt diese Aussage auch für  $H_0$ -relativ beschränkte  $V_\omega$ . Bei (3.33) handelt es sich um eine Combes-Thomas Abschätzung, die wir schon in Abschnitt 2.2 erwähnt haben, diesmal in der Spurklasse-Norm. Aus dem Beweis von Theorem XIII.96 in [RS78] ersieht man die Schranke an die Resolvente

$$\|\chi^1(z - H_{L,\omega})^{-1}T_\gamma(u\chi_{\beta+\gamma}^1)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{\tilde{C}_1}{|y|} \|u\chi_{\beta+\gamma}^1\|_{L^p}, \quad (3.34)$$

wobei  $T_\gamma$  die Translation um  $\gamma \in \mathbb{Z}^d$  ist. Da  $u$  im  $L^p$ -Sinne exponentiell Abfällt, ist (3.34) eine exponentielle Schranke im Parameter  $-|\gamma + \beta|$ .

### Lemma 3.6.3

Sei  $g \in C_0^{n+1}$  und  $\tilde{f}$  eine fast analytische Fortsetzung von  $f(x) := (\lambda + x)^q g(x)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x) dN_{L,\omega}(x) \right) - \int_{\mathbb{R}} g(x) dN(x) \right| \\ & \leq \frac{C_1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} dx dy \frac{1}{|y|^2} \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(x, y) \right| \left( \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^d \\ \gamma \in \mathbb{Z}^d, |\gamma| > L/2}} \|\chi_{\beta+\gamma}^1 u\|_{L^p} \exp(-|y| |\beta|/C_1) \right) \end{aligned}$$

### Beweis:

Wir benutzen die Helffer-Sjöstrand Formel (3.19) und die in Bemerkung 3.6.2 zusammengestellten Aussagen ohne weitere Erwähnung. Sei  $q > d$ . Falls wir

$$g(H_{L,\omega}) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(z) (z - H_{L,\omega})^{-1} (\lambda + H_{L,\omega})^{-q} dx dy \quad (3.35)$$

mit der charakteristischen Funktion im Konfigurationsraum  $\chi^1$  multiplizieren, bekommen wir einen Spurklasse-Operator. Demzufolge gilt

$$\text{Tr}(\chi^1 g(H_{L,\omega}) \chi^1) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(z) \text{Tr}(\chi^1 (z - H_{L,\omega})^{-1} (\lambda + H_{L,\omega})^{-q} \chi^1) dx dy. \quad (3.36)$$

Diese Formel bleibt gültig, falls man  $H_\omega$  für  $H_{L,\omega}$  substituiert. Wir wollen den Erwartungswert der Spur von  $\chi^1 (H_{L,\omega} - H_\omega)\chi^1$  abschätzen. Dazu zerlegen wir

$$\begin{aligned} & \|\chi^1 (z - H_{L,\omega})^{-1}(\lambda + H_{L,\omega})^{-q}\chi^1 - \chi^1 (z - H_\omega)^{-1}(\lambda + H_\omega)^{-q}\chi^1\|_{\text{Tr}} \\ & \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 \end{aligned}$$

in die beiden Summanden

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \|\chi^1 ((z - H_{L,\omega})^{-1} - (z - H_\omega)^{-1}) (\lambda + H_\omega)^{-q}\chi^1\|_{\text{Tr}} \\ &= \left\| \chi^1 \left( (z - H_{L,\omega})^{-1} \left( \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d, |\gamma| > L/2} (\omega_{\tilde{\gamma}} - \omega_\gamma) u(x - \gamma) \right) (z - H_\omega)^{-1} \right) \right. \\ & \quad \left. \times (\lambda + H_\omega)^{-q}\chi^1 \right\|_{\text{Tr}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \|\chi^1 (z - H_{L,\omega})^{-1} ((\lambda + H_{L,\omega})^{-q} - (\lambda + H_\omega)^{-q}) \chi^1\|_{\text{Tr}} \\ &= \left\| \chi^1 (z - H_{L,\omega})^{-1} \sum_{m=1}^q (\lambda + H_{L,\omega})^{m-q-1} \left( \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^d \\ |\gamma| > L/2}} (\omega_{\tilde{\gamma}} - \omega_\gamma) u(x - \gamma) \right) \right. \\ & \quad \left. \times (\lambda + H_\omega)^{-m}\chi^1 \right\|_{\text{Tr}}. \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung benutzen wir eine iterierte Resolventenformel. Die Schranke  $|\omega_{\tilde{\gamma}} - \omega_\gamma| \leq \omega_+$  und Standard-Abschätzungen für die Spur-Norm  $\|\cdot\|_{\text{Tr}}$  liefern:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq \omega_+ \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d, |\gamma| > L/2} \|\chi^1 (z - H_{L,\omega})^{-1} u(x - \gamma) \chi_\beta^1\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \quad \times \|\chi_\beta^1 (z - H_\omega)^{-1} (\lambda + H_\omega)^{-q}\chi^1\|_{\text{Tr}} \\ &\leq \frac{C_1}{|y|^2} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d, |\gamma| > L/2} \|\chi_{\beta+\gamma}^1 u\|_{L^p} \exp(-|y| |\beta| / C_1) \end{aligned}$$

Es gilt  $u(x - \gamma)\chi_\beta^1(x) = T_\gamma[u(x)\chi_{\beta-\gamma}^1(x)]$ . Die Summation über  $\gamma \in \mathbb{Z}^d$  kann man durch die über  $-\gamma \in \mathbb{Z}^d$  ersetzen und dann (3.34) anwenden. Die Abschätzung von  $\Sigma_2$  verläuft analog; man muß nur bemerken, daß mindestens einer der beiden Exponenten  $-(q + 1 - m)$  oder  $-m$  kleiner als  $-d/2$  ist.

**q.e.d.**

**Bemerkung 3.6.4**

Klopp bemerkt, daß sein Theorem 5.1 in [Klo99] für jedes  $g \in C_0^\infty$  die Fehlerabschätzung

$$\int g dN = \mathbb{E} \left( \int g dN_{L,\omega} \right) + \mathcal{O}(L^{-\infty}) \quad (3.37)$$

liefert. Für unsere Zwecke ist diese Aussage nicht ausreichend, da wir  $g \approx \chi_{[0,E]}$  und gleichzeitig  $E$  als Funktion von  $L^{-1}$  wählen wollen, vgl. (3.50) auf Seite 66.

Daher müssen wir genau wissen, wie (3.37) von der Funktion  $g$  abhängt. Die beiden folgenden Lemmata 3.6.5 und 3.6.6 liefern die Schranken, mit deren Hilfe man (3.37) zu der Fehlerabschätzung in unserem Satz 3.6.1 verschärfen kann.

**Lemma 3.6.5**

Falls man die Konstante  $C < \infty$  genügend groß und  $c > 0$  genügend klein wählt, gibt es ein  $L_1 := L_1(d, \delta_3) < \infty$ , so daß für alle  $y$  mit  $|y| \leq 3$  und  $L \geq L_1$

$$\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^d \\ |\gamma| > L/2}} \|\chi_{\beta+\gamma}^1 u\|_{L^p} \exp(-|y| |\beta|/C_1) \leq C e^{-c|y|L} |y|^{-d^2}$$

gilt.

**Beweis:**

Da das Einzelplatz-Potential  $u$  im  $L^p$ -Sinne exponentiell abfällt, wissen wir:

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^d \\ |\gamma| > L/2}} \|\chi_{\beta+\gamma}^1 u\|_{L^p} \exp(-|y| |\beta|/C_1) \quad (3.38) \\ & \leq \delta_2 \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^d, \\ |\beta| \geq L/8}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^d, \\ |\gamma| > L/2}} \exp(-\delta_3 |\beta + \gamma|) \exp(-|y| |\beta|/C_1) \\ & + \delta_2 \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^d, \\ |\beta| < L/8}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^d, \\ |\gamma| > L/2}} \exp(-\delta_3 |\beta + \gamma|) \exp(-|y| |\beta|/C_1). \end{aligned}$$

Wegen der Zerlegung  $|\beta| = 1/2|\beta| + 1/2|\beta|$  gilt für  $|\beta| \geq L/8$

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{|y| |\beta|}{C_1}\right) &= \exp\left(-\frac{|y| |\beta|}{2C_1}\right) \exp\left(-\frac{|y| |\beta|}{2C_1}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{|y| |\beta|}{2C_1}\right) \exp\left(-\frac{|y| L}{16C_1}\right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Für  $|\beta| < L/8$  nutzen wir dagegen die Relation

$$|\gamma + \beta| \geq |\gamma| - |\beta| = 1/2|\gamma| + (1/2|\gamma| - |\beta|) \geq 1/2|\gamma| + L/8,$$

aus der

$$\exp(-|\gamma + \beta|) \leq \exp(-1/2|\gamma|) \exp(-L/8) \quad (3.40)$$

folgt. Mit den Ungleichungen (3.39) und (3.40) schätzen wir die beiden Doppelsummen durch

$$\begin{aligned}
& \delta_2 \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^d, \\ |\beta| \geq L/8}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^d, \\ |\gamma| > L/2}} \exp(-\delta_3 |\beta + \gamma|) \exp\left(-\frac{|y| |\beta|}{2C_1}\right) \exp\left(-\frac{|y|L}{16C_1}\right) \\
+ & \delta_2 \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^d, \\ |\beta| < L/8}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^d, \\ |\gamma| > L/2}} \exp(-\delta_3 |\gamma|/2) \exp(-\delta_3 L/8) \underbrace{\exp(-|y| |\beta|/C_1)}_{\leq 1} \\
=: & \delta_2 S_1 + \delta_2 S_2
\end{aligned} \tag{3.41}$$

ab. Zuerst wenden wir uns der oberen Schranke von  $S_1$  zu.

$$\begin{aligned}
S_1 & \leq \exp\left(-\frac{|y|L}{16C_1}\right) \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^d, \\ |\beta| \geq L/8}} \exp\left(-\frac{|y| |\beta|}{2C_1}\right) \left( \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} e^{-\delta_3 |\beta + \gamma|} \right) \\
& \leq \exp\left(-\frac{|y|L}{16C_1}\right) \left( \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} e^{-\delta_3 |\gamma|} \right) \sum_{n \geq L/8} e^{-\frac{|y|n}{2C_1}} 2^d (2n+1)^{d-1},
\end{aligned}$$

wobei wir für  $\beta$  Polarkoordinaten benutzen. Den letzten Faktor wollen wir als Funktion von  $|y|$  und  $L$  abschätzen.

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq L/8} \exp\left(-\frac{|y|n}{2C_1}\right) 2^d (2n+1)^{d-1} & \leq \sum_{n \geq L/8}^{n_0} \exp\left(-\frac{|y|n}{2C_1}\right) 2^d (2n+1)^{d-1} \\
& + \sum_{n > n_0} \exp\left(-\frac{|y|n}{4C_1}\right).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Dabei wählen wir  $n_0$  so, daß für alle  $n \geq n_0 := n_0(|y|, d, C_1)$

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{|y|n}{2C_1}\right) 2^d (2n+1)^{d-1} & \leq \exp\left(-\frac{|y|n}{4C_1}\right) \\
\Leftrightarrow 2^d (2n+1)^{d-1} & \leq \exp\left(\frac{|y|n}{4C_1}\right)
\end{aligned}$$

gilt. Wir setzen  $n_0 := \left\lceil 2^d 3^{d-1} d! \left(\frac{|y|}{4C_1}\right)^{-d} + 1 \right\rceil \leq C_2 |y|^{-d}$  (da  $|y| \leq 3$ ), woraus wie gewünscht

$$\begin{aligned}
2^d (2n+1)^{d-1} & \leq 2^d 3^{d-1} n^{d-1} \leq \left(\frac{|y|}{4C_1}\right)^d \frac{n^d}{d!} \\
& \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(|y| \frac{n}{4C_1}\right)^l = \exp\left(\frac{|y|n}{4C_1}\right) \quad \forall n \geq n_0
\end{aligned}$$

folgt. Damit können wir (3.42) abschätzen

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq L/8}^{n_0} \exp\left(-\frac{|y|n}{2C_1}\right) 2^d (2n+1)^{d-1} & \leq C_2 |y|^{-d} e^{-\frac{|y|L}{16C_1}} 2^d (2C_2 |y|^{-d} + 1)^{d-1} \\
& \leq C_3 |y|^{-d^2}
\end{aligned}$$

Für den unendlichen Teil der Reihe benutzen wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{n>n_0} \exp\left(-\frac{|y|n}{4C_1}\right) &\leq \sum_{n\geq 0} \exp\left(-\frac{|y|n}{4C_1}\right) = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{|y|}{4C_1}\right)} \\ &\leq \frac{4C_1}{|y|} \exp\left(\frac{|y|}{4C_1}\right). \end{aligned}$$

Aus  $|y| \leq 3$  folgt

$$C_3|y|^{-d^2} + \frac{4C_1}{|y|} \exp\left(\frac{|y|}{4C_1}\right) \leq C_4|y|^{-d^2}$$

und daraus die folgende Schranke an den ersten Summanden  $S_1$  in (3.41)

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \exp\left(-\frac{|y|L}{16C_1}\right) \left( \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} e^{-\delta_3|\gamma|} \right) \left( C_3|y|^{-d^2} + \frac{4C_1}{|y|} \exp\left(\frac{|y|}{4C_1}\right) \right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{|y|L}{16C_1}\right) \left( \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} e^{-\delta_3|\gamma|} \right) C_4|y|^{-d^2} \\ &\leq C_5 \exp\left(-\frac{|y|L}{16C_1}\right) |y|^{-d^2}. \end{aligned}$$

Die endliche Summe  $S_2$  ist leicht abzuschätzen:

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \exp(-\delta_3L/8)(1 + L/4)^d \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^d, \\ |\gamma| > L/2}} e^{-\delta_3|\gamma|/2} \\ &\leq \exp(-\delta_3L/10), \end{aligned}$$

falls wir  $L \geq L_1 := L_1(d, \delta_3)$  genügend groß wählen. Wir fügen die beiden Summen zusammen und erhalten

$$\delta_2(S_1 + S_2) \leq \delta_2 \left( C_5 \exp\left(-\frac{|y|L}{16C_1}\right) |y|^{-d^2} + \exp\left(-\frac{\delta_3L}{10}\right) \right) \quad \forall L \geq L_1. \quad (3.43)$$

Der zweite Summand ist gutmütig und wir subsumieren ihn in den ersten. Dazu setzen wir  $C_6 := \min(\frac{\delta_3}{30}, \frac{1}{16C_1}, \frac{1}{2})$ ,  $C_7 := C_5 + 3^{d^2}$  und beachten, daß für  $|y| \leq 3$  die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} C_5 \exp\left(-\frac{|y|L}{16C_1}\right) |y|^{-d^2} &\leq C_5|y|^{-d^2} \exp(-C_6|y|L) \\ \exp\left(-\frac{\delta_3L}{10}\right) &\leq 3^{d^2}|y|^{-d^2} \exp(-C_6|y|L) \end{aligned}$$

gelten. Aus diesen folgt

$$C_5 \exp\left(-\frac{|y|L}{16C_1}\right) |y|^{-d^2} + \exp\left(-\frac{\delta_3L}{10}\right) \leq C_7 |y|^{-d^2} \exp(-C_6|y|L)$$

Schließlich beweist die Relation

$$\delta_2(S_1 + S_2) \leq \delta_2 C_7 |y|^{-d^2} e^{-C_6 |y|L}$$

das Lemma mit  $C = C(d, \delta_2, \delta_3, C_1) := \delta_2 C_7$  und  $c = c(\delta_3, C_1) := C_6$ .

**q.e.d.**

**Lemma 3.6.6**

Sei  $f$  in  $C^{n+1}([-1/2, 1/2])$  und  $\tilde{f}$  die fast analytische Fortsetzung der Ordnung  $n$ . Dann existiert ein  $L_2 := L_2(n, d, c) < \infty$ , so daß für alle  $L \geq L_2$

$$\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(x, y) \right| |y|^{-d^2-2} e^{-c|y|L} dx dy \leq 2 c^{-n+d^2+2} \|f\|_{n+1} |\text{supp } f| L^{-n+d^2+1}$$

gilt.

Die Konstante  $c$  in der Aussage des Lemmas entspricht  $C_6$  im Beweis von Lemma 3.6.5.

**Beweis:**

Aus Gleichung (3.23) wissen wir, daß

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}}(x, y) \right| \leq \frac{1}{2n!} |f^{(n+1)}_s| |y|^n + \frac{3}{\langle x \rangle} \chi_{\{\langle x \rangle < |y| < 2\langle x \rangle\}} \sum_{r=0}^n |f^{(r)}| \frac{|y|^r}{r!}. \quad (3.44)$$

Also müssen wir für zwei Integrale einen obere Schranke finden. Das zweite davon ist

$$\int_{\mathbb{C}} dx dy |y|^{-d^2-2} \exp(-C_6 |y|L) \frac{3}{\langle x \rangle} \chi_{\{\langle x \rangle < |y| < 2\langle x \rangle\}} \sum_{r=0}^n |f^{(r)}| \frac{|y|^r}{r!}.$$

Wegen der Eigenschaften von  $\langle x \rangle$ ,  $s$  und  $f$  gilt für  $(x, y)$ , die zum Integral beitragen  $\langle x \rangle \geq 1$  und  $1 < |y| < 3$ . Daher können wir die vorhergehende Zeile durch

$$6 \int_{x \in \text{supp } f} \int_{y > 0} dx dy e^{-C_6 L} \sum_{r=0}^n |f^{(r)}| \frac{3^r}{r!} \chi_{[1,3]}(y) \leq 60 |\text{supp } f| \|f\|_n e^{-C_6 L}$$

von oben abschätzen, wobei wir  $3^r \leq 5r!$  und  $\|f\|_n := \sum_{r=0}^n \|f^{(r)}\|_\infty$  benutzen. Nun wenden wir uns dem Integral zu, das von dem ersten Summanden in (3.44)

stammt.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n!} \int_{\text{supp}f} dx \int dy |y|^{n-d^2-2} \exp(-C_6|y|L) |f^{(n+1)}(x)| \\
& \leq \frac{\|f\|_{n+1}}{n!} \int_{\text{supp}f} dx \int_{y>0} dy y^{n-d^2-2} \exp(-C_6yL) \\
& = \frac{\|f\|_{n+1}}{L n!} L^{-n+d^2+2} \int_{\text{supp}f} dx \int_{t>0} dt \exp(-C_6t) t^{n-d^2-2} \\
& = \frac{\|f\|_{n+1}}{n!} L^{-n+d^2+1} |\text{supp}f| C_6^{-n+d^2+2} (n-d^2-2)! \\
& \leq C_6^{-n+d^2+2} \|f\|_{n+1} |\text{supp}f| L^{-n+d^2+1}.
\end{aligned}$$

Für ausreichend großes  $L$ , d.h.  $L \geq L_2(d, C_6, n)$  gilt

$$60 \exp(-C_6L) \leq C_6^{-n+d^2+2} L^{-n+d^2+1}$$

und somit der Beweis des Lemmas:

$$\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(x, y) \right| |y|^{-d^2-2} e^{-C_6|y|L} dx dy \leq 2C_6^{-n+d^2+2} \|f\|_{n+1} |\text{supp}f| L^{-n+d^2+1}.$$

**q.e.d.**

Wir benötigen eine obere Schranke der Ableitungen von  $f := (\lambda + \cdot)^q g$ , in die nur die ursprüngliche Funktion  $g$  und ihre Ableitungen eingehen. Die Leibnitzsche Formel und eine einfache Rechnung zeigen, daß  $\|f\|_{n+1} \leq C_8 \|g\|_{n+1}$  gilt, wobei  $C_8$  nur von  $n, q$  und  $\lambda$  abhängt.

Nun können wir die Ungleichungskette für die Differenz der Integrale bezüglich  $dN$  und  $dN_{L,\omega}$  zusammenstellen und damit den

**Beweis von Satz 3.6.1** abschließen.

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E} \left( \int g(x) dN_{L,\omega}(x) \right) - \int g(x) dN(x) \right| \\
& = \left| \mathbb{E} (\text{Tr} \chi^1 g(H_{L,\omega}) \chi^1) - \mathbb{E} (\text{Tr} \chi^1 g(H_\omega) \chi^1) \right| \\
& \leq \mathbb{E} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} dx dy \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(x, y) \right| \right. \\
& \quad \left. \times \|\chi^1 (H_{L,\omega} + \lambda)^{-q} (H_{L,\omega} - z)^{-1} \chi^1 - \chi^1 (H_\omega + \lambda)^{-q} (H_\omega - z)^{-1} \chi^1\|_{\text{Tr}} \right) \\
& \leq \frac{C_1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} dx dy \frac{1}{|y|^2} \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(x, y) \right| \left( \sum_{\beta \in \Gamma} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma, \\ |\gamma| > L/2}} \|\chi_{\beta+\gamma}^1 u\|_{L^p} \exp\left(-\frac{|y| |\beta|}{C_1}\right) \right) \\
& \leq \dots
\end{aligned}$$



aufgrund von Lemma 3.6.3. Die Ungleichungskette wird fortgesetzt durch die Abschätzungen aus den Lemmata 3.6.5 und 3.6.6.

$$\begin{aligned}
\dots &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} dx dy \frac{C_1}{|y|^2} \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(x, y) \right| \delta_2(S_1 + S_2) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} dx dy \delta_2 C_1 \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(x, y) \right| C_7 |y|^{-d^2-2} \exp(-C_6 |y|l) \\
&\leq \frac{\delta_2 C_1 C_7}{2\pi} \\
&\quad \times \left( 60 |\text{supp} f| \|f\|_n e^{-C_6 L} + C_6^{-n+d^2+2} \|f\|_{n+1} |\text{supp} f| L^{-n+d^2+1} \right) \\
&\leq \frac{\delta_2 C_1 C_7}{\pi C_6^{n-d^2-2}} |\text{supp} f| \|f\|_{n+1} L^{-n+d^2+1} \\
&\leq C_9 |\text{supp} g| \|g\|_{n+1} L^{-n+d^2+1}
\end{aligned}$$

Dabei wählen wir  $L \geq L_3 := \max(L_1, L_2) = L_3(d, n, \delta_3, C_1)$  und setzen  $C_9 := \frac{\delta_2 C_1 C_7 C_8}{\pi C_6^{n-d^2-2}}$ . Damit ist Satz 3.6.1 bewiesen mit  $C_9$  als der Konstanten auf der rechten Seite der Ungleichung.

**q.e.d.**

### Bemerkung 3.6.7

Nun wollen wir mit Hilfe der periodischen Approximation  $H_{L,\omega}$  abschätzen, welches Maß der Menge  $[0, E]$  von  $dN$  zugeordnet wird, d.h. wie groß in dem ungeordneten System  $H_\omega$  die „Anzahl der Zustände“ mit Energien in  $[0, E]$  ist.

Dazu wählen wir  $g \in C_0^{n+1}(\mathbb{R})$  mit Werten in  $[0, 1]$ ,  $g(x) = 1$  für alle  $x \in [0, E]$  und Träger in  $[-E/2, 3E/2]$ . Darüberhinaus soll  $g$  eine minimale Ableitung im Sinne von Ungleichung (3.24) haben.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [N_{L,\omega}(E) - N_{L,\omega}(0)] - [N(E) - N(0)] &\leq \mathbb{E} \left( \int_0^E g dN_{L,\omega} \right) \\
&\leq \left| \mathbb{E} \left( \int_0^E g dN_{L,\omega} \right) - \int_0^E g dN \right| + \int_0^E g dN \\
&= \left| \mathbb{E} \left( \int_0^E g dN_{L,\omega} \right) - \int_0^E g dN \right| + [N(E) - N(0)]. \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Für  $L \geq L_3$  gilt wegen Satz 3.6.1 und Gleichung (3.24) mit  $C_{10} := \text{const } \tilde{C}$  in der dortigen Notation

$$\mathbb{E} [N_{L,\omega}(E) - N_{L,\omega}(0)] \leq 2(N(E) - N(0)) + C_{10} E^{-n} L^{-n+d^2+1}. \quad (3.46)$$

Wir nehmen an, daß  $N$  Lifschitz-Tails an der unteren spektralen Kante 0 im Sinne von (3.3) besitzt. Dann existiert eine Energie  $E_1$ , so daß für alle  $E \in [0, E_1]$

$$N(E) - N(0) \leq \exp(-E^{-d/4}) \quad (3.47)$$

gilt. Zusammen mit (3.46) folgt

$$\mathbb{E} [N_{L,\omega}(E) - N_{L,\omega}(0)] \leq 2 \exp(-E^{-d/4}) + C_{10} E^{-n} L^{-n+d^2+1} \quad \forall E \in [0, E_1]. \quad (3.48)$$

Wir wählen  $E$  als Funktion von  $L$

$$E := L^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.49)$$

Für genügend großes  $L \geq \tilde{L}_4 := \tilde{L}_4(d, n, C_{10})$  folgt nun

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N_{L,\omega}(E) - N_{L,\omega}(0)] &\leq 2 \exp(-(L^{-\frac{1}{2}})^{-d/4}) + C_{10} (L^{-\frac{1}{2}})^{-n} L^{-n+d^2+1} \\ &= 2 \exp(-L^{d/8}) + C_{10} L^{-n(\frac{1}{2})+d^2+1} \\ &\leq 2 C_{10} L^{-\frac{n}{2}+d^2+1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen.

**Satz 3.6.8**

Seien  $N$  und  $N_{L,\omega}$  die integrierte Zustandsdichten von  $H_\omega$  bzw.  $H_{L,\omega}$ . Falls  $N$  bei der unteren spektralen Kante 0 der Lifschitz-Asymptotik gehorcht, gilt für genügend großes  $L$

$$\mathbb{E} [N_{L,\omega}(L^{-\frac{1}{2}}) - N_{L,\omega}(0)] \leq 2 C_{10} L^{-\frac{n}{2}+d^2+1}. \quad (3.51)$$

Genauer gesagt, muß man  $L \geq L_5$  und  $L_5 := \max(\tilde{L}_4, E_1^{-2})$  wählen, vgl. (3.50) und (3.47).

**Bemerkung 3.6.9 (Modifikation für Korollar 2.1.6)**

Unter unseren Voraussetzungen und der zusätzlichen Annahme, daß der Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^2$  zweidimensional ist, das Einzelplatz-Potential  $u$  stetig ist und kompakten Träger besitzt, haben Klopp und Wolff in Theorem 3.1 von [KW00] bewiesen, daß

$$-2\kappa := \limsup_{\substack{E \rightarrow 0 \\ E \in \sigma(H_\omega)}} \frac{\log |\log |N(E) - N(0)||}{\log |E|} < 0 \quad (3.52)$$

gilt. Diese Asymptotik nenne wir *verallgemeinerte Lifschitz-Tails*. Falls (3.52) gilt, existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $|E| \leq \delta$

$$\limsup_{\substack{E \rightarrow 0 \\ E \in \sigma(H_\omega)}} \frac{\log |\log |N(E) - N(0)||}{\log |E|} < -\kappa \quad (3.53)$$

ist. Daraus folgt

$$|N(E) - N(0)| \leq e^{-E^{-\kappa}}.$$

Wie in (3.50) bekommt man nun mit  $E := L^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} [N_{L,\omega}(E) - N_{L,\omega}(0)]| &\leq 2 \exp(-L^{\kappa/2}) + C_{10} L^{-n(\frac{1}{2})+d^2+1} \\ &\leq 2 C_{10} L^{-\frac{n}{2}+d^2+1} \end{aligned} \quad (3.54)$$

für großes  $L$ . Also ist auch in diesem Fall Satz 3.6.8 gültig.

### 3.7 Eigenwerte nahe der spektralen Kante sind selten

Wir wollen abschätzen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, Eigenwerte von  $H_{L,\omega}(\theta)$  in einem kleinen Energieintervall  $I$  um 0 zu finden. Im folgenden Lemma finden wir eine obere Schranke an diese Wahrscheinlichkeit, welche nur von der integrierte Zustandsdichte von  $H_{L,\omega}$  abhängt.

#### Lemma 3.7.1

$$\int_{\theta \in \Lambda_L^*} d\theta \mathbb{P}(\{\omega \mid \sigma(H_{L,\omega}(\theta)) \cap [0, E] \neq \emptyset\}) \leq (2\pi)^d \mathbb{E} (N_{L,\omega}(E) - N_{L,\omega}(0)).$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} &\int_{\theta \in \Lambda_L^*} d\theta \mathbb{P}(\{\omega \mid \sigma(H_{L,\omega}(\theta)) \cap [0, E] \neq \emptyset\}) \\ &\leq |\Lambda_L| \int_{\theta \in \Lambda_L^*} d\theta \mathbb{E} (N(H_{L,\omega}(\theta), E) - N(H_{L,\omega}(\theta), 0)) \quad \text{Ungleichung von Čebyšev} \\ &= |\Lambda_L| \mathbb{E} \left( \int_{\theta \in \Lambda_L^*} d\theta (N(H_{L,\omega}(\theta), E) - N(H_{L,\omega}(\theta), 0)) \right) \quad \text{Satz von Fubini} \\ &= (2\pi)^d \mathbb{E} (N_{L,\omega}(E) - N_{L,\omega}(0)) \quad \text{Gleichungen (1.11),(3.29)} \end{aligned}$$

**q.e.d.**

Die Multiskalen-Analyse benutzt spezifische Randbedingungen, z.B. Dirichlet- oder periodischen Randbedingungen, wie aus den Voraussetzungen von Theorem 2.2.11 ersichtlich ist. Also müssen wir die Mittelung über sämtliche  $\theta \in \Lambda_L^*$

im letzten Lemma 3.7.2 „loswerden“. Dies ist möglich, indem man die Lipschitz-Stetigkeit in  $\theta$  der Floquet-Eigenwerte von  $H_{L,\omega}$  ausnutzt.

**Lemma 3.7.2**

Für ein beliebiges, festes  $\theta_0 \in \Lambda_L^*$  und  $E \leq 1$  gilt

$$\mathbb{P}(\{\omega \mid \sigma(H_{L,\omega}(\theta_0)) \cap [0, E[ \neq \emptyset\}) \leq \frac{(2\pi)^d}{|\Lambda_L^*|} \mathbb{E}(N_{L,\omega}(E + C_{12}L^{-1}) - N_{L,\omega}(0)) . \quad (3.55)$$

**Beweis:**

Die Eigenwerte von  $H_{L,\omega}(\theta)$  sind Lipschitz-stetig in  $\theta$ , daher gilt:

$$|E_j(H_{L,\omega}(\theta)) - E_j(H_{L,\omega}(\theta'))| \leq \Xi_{j,L} |\theta - \theta'|$$

für gewisse  $\Xi_{j,L} > 0$ . An der Darstellung (3.13) sieht man, daß die Koeffizienten  $\Xi_{j,L} > 0$  unabhängig von  $L$  und  $j$ , nur als (monotone) Funktion von dem Eigenwert  $E_j(H_{L,\omega}(\theta))$  selbst gewählt werden können. Da wir uns nur für Eigenwerte im Intervall  $[0, E[ \subset [0, 1[$  interessieren, kann man auch diese Abhängigkeit eliminieren. Es existiert also ein  $\Xi > 0$  so daß für alle  $L, j$

$$\Xi \geq \Xi_{j,L}$$

gilt. Es folgt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{\omega \mid \sigma(H_{L,\omega}(\theta_0)) \cap [0, E[ \neq \emptyset\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \mid \exists j \in \mathbb{N} : E_j(H_{L,\omega}(\theta_0)) \in [0, E[ \}) \\ &= \int_{\theta \in \Lambda_L^*} \frac{d\theta}{|\Lambda_L^*|} \mathbb{P}(\{\omega \mid \exists j \in \mathbb{N} : E_j(H_{L,\omega}(\theta)) \in [0, E[ \}) \\ &\leq \dots \end{aligned}$$

$E_j(H_{L,\omega}(\theta_0)) \in [0, E[$  impliziert  $E_j(H_{L,\omega}(\theta)) \in [0, E + \Xi \text{diam}(\Lambda_L^*)[$  für alle  $\theta \in \Lambda_L^*$ . Man beachte, daß  $\text{diam}(\Lambda_L^*) \leq C_{11} L^{-1}$  gilt. Wir setzen die Ungleichungskette fort und schließen damit das Lemma ab:

$$\begin{aligned} \dots &\leq \int_{\theta \in \Lambda_L^*} \frac{d\theta}{|\Lambda_L^*|} \mathbb{P}(\{\omega \mid \exists j \in \mathbb{N} : E_j(H_{L,\omega}(\theta)) \in [0, E + C_{12}L^{-1}[ \}) \\ &= \int_{\theta \in \Lambda_L^*} \frac{d\theta}{|\Lambda_L^*|} \mathbb{P}(\{\omega \mid \sigma(H_{L,\omega}(\theta)) \cap [0, E + C_{12}L^{-1}[ \neq \emptyset\}) \\ &\leq (2\pi)^d |\Lambda_L^*|^{-1} \mathbb{E}(N_{L,\omega}(E + C_{12}L^{-1}) - N_{L,\omega}(0)). \end{aligned}$$

**q.e.d.**

**Beweis von Satz 3.0.1:**

Wie vorhin wählen wir  $E := L^{\frac{1}{2}}$ . Für  $L \geq L_6 := L_6(C_{12})$  gilt  $E + C_{12}L^{-1} \leq 2L^{-\frac{1}{2}}$ . Da die integrierte Zustandsdichte monoton von der Energie  $E$  abhängt, folgt

$$N_{L,\omega}(E + C_{12}L^{-1}) \leq N_{L,\omega}(2L^{-\frac{1}{2}}).$$

Wir nehmen an, daß 0 eine Floquet-regulärer untere spektraler Rand von  $\sigma(H_0)$  ist. Dann weist  $N$  bei 0 ein Lifschitz-asymptotisches Verhalten auf. Wie in (3.50) ergibt sich für  $L \geq L_4(d, n, C_{10})$

$$\mathbb{E}(N_{L,\omega}(2L^{-\frac{1}{2}}) - N_{L,\omega}(0)) \leq 2C_{10}L^{-\frac{n}{2}+d^2+1}.$$

So folgt aus Lemma 3.7.2

$$\mathbb{P}(\{\omega \mid \sigma(H_{L,\omega}(\theta_0)) \cap [0, L^{-\frac{1}{2}}] \neq \emptyset\}) \leq C_{13}L^{-\frac{n}{2}+d^2+d+1}. \quad (3.56)$$

Dabei benutzen wir, daß  $|\Lambda_L^*|^{-1} \leq \tilde{C}_{13}L^d$  ist, und setzten  $C_{13} := 2C_{10}\tilde{C}_{13}(2\pi)^d$ . Die Konstante  $\tilde{C}_{13}$  hängt nur von der Dimension  $d$  ab. Die Wahrscheinlichkeit in (3.56) kann für jedes  $q > 0$  durch  $L^{-q}$  abgeschätzt werden, falls man  $L \geq L_7 := L_7(C_{13}, n, d, q)$  genügend groß und

$$\begin{aligned} & -\frac{n}{2} + d^2 + d + 1 < -q \\ \iff & -\frac{n}{2} < -q - d^2 - d - 1 \\ \iff & n > 2(q + d^2 + d + 1) \end{aligned} \quad (3.57)$$

wählt. Damit haben wir Satz 3.0.1 mit  $l_0 := \max_{i=1}^7 L_i$  bewiesen.

**q.e.d.**



## Kapitel 4

# Wegner-Abschätzung für indefinite Potentiale

In diesem Kapitel beweisen wir die Wegner-Abschätzung, Theorem 2.1.12. Wie dem Abschnitt 2.2 zu entnehmen ist, spielt diese Schranke eine entscheidende Rolle beim Nachweis von reinem Punktspektrum.

In den Abschnitten 4.2 und 4.3 beschreiben wir die spektrale Mittelung für Legierungs-Modelle mit nicht-negativen Potential. Darauf verwenden wir einen neuen Ansatz, welcher für Einzelplatz-Potentiale mit *wechselndem Vorzeichen* notwendig ist. Dies ist der Inhalt der Abschnitte 4.4 und 4.5, während in 4.6 die erzielten technischen Resultate auf die integrierte Zustandsdichte angewandt werden.

Von den bisherigen Resultaten über die Wegner Abschätzung ist der in [KoS87, CH94] und [FHLM97] entwickelte Zugang unser Argumentation am ähnlichsten. Konzeptionell neu an unserem Zugang ist die Verwendung der *gemeinsamen Dichte* der Kopplungskonstanten  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  anstatt der bedingten Dichte eines einzelnen  $\omega_k$ .

Ein abstrakter Zugang erlaubt es, die Abschätzungen für das kontinuierliche und diskrete Modell simultan zu beweisen und auf den Fall korrelierter Kopplungskonstanten einzugehen.

### 4.1 Darlegung der Problematik

Beim Induktionsschritt der Multiskalen-Analyse werden Würfel  $\Lambda_l$  der Seitenlänge  $l$  zu einem größeren Würfel  $\Lambda_L$  zusammengefaßt. Man weiß schon mit „guter“ Wahrscheinlichkeit, daß die Resolvente des auf ein  $\Lambda_l$  eingeschränkten Operators  $H_\omega^l$  exponentiell abfällt und um ein Lokalisations-Zentrum konzentriert ist. „Gut“ bedeutet in diesem Zusammenhang, daß diese Wahrscheinlich-

keit nahe bei Eins liegt und die Differenz polynomial klein in  $l$  ist. Zu zeigen ist, daß nach der Entfernung der Dirichlet-Randbedingungen zwischen den  $\Lambda_l$  die Resolvente auf dem großen Würfel  $\Lambda_L$  dieselbe Eigenschaft besitzt.

Für diese Folgerung reicht es nicht allein, die exponentielle Lokalisierung der Resolventen um ein Lokalisations-Zentrum in den einzelnen Würfeln  $\Lambda_l$  der kleineren Skala  $l$  zu wissen. Zusätzlich muß sichergestellt sein, daß die  $\Lambda_l$  nicht zueinander in *Resonanz* stehen. Genauer gesagt, darf der Mengenabstand zwischen den Spektren

$$d(\sigma_1, \sigma_2) \quad (4.1)$$

der Restriktion von  $H_\omega$  auf verschiedene  $\Lambda_l$ -Würfel nicht zu klein sein. Hier sind  $\Lambda_l^1, \Lambda_l^2$  zwei disjunkte Würfel der Seitenlänge  $l$ ,  $H_i := H_\omega^{\Lambda_l^i}, i = 1, 2$  die entsprechenden Einschränkungen des Schrödinger-Operators  $H_\omega$  und  $\sigma_i := \sigma(H_i), i = 1, 2$  die zugehörigen Spektren. Die Rolle der Distanz (4.1) für den exponentiellen Abfall der Resolventen bzw. der Eigenfunktionen wird anhand des folgenden Beispiels deutlich.

**Beispiel 4.1.1 (Wozu braucht man die Wegner-Abschätzung?)**

Seien  $V_1, V_2 \leq 0$  zwei glatte Potentiale mit kompaktem Träger

$$\mathcal{V}_i := \text{supp}V_i \subset B_r(a_i), r > 0, a_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2. \quad (4.2)$$

Dann gilt  $d(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \geq |a_1 - a_2| - 2r =: \varrho$ .

1. Wir betrachten zuerst den *Sonderfall*, daß sich  $V_2$  durch die Spiegelung an einer Hyperebene aus  $V_1$  ergibt. Dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$V_2(x_1, x_2, \dots, x_d) = V_1(-x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (4.3)$$

annehmen. Der Schrödinger-Operator

$$H := -\Delta + V_1 + V_2 \quad (4.4)$$

ist invariant unter dem unitären Spiegelungs-Operator

$$\Pi: L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2), \quad (\Pi f)(x_1, x_2, \dots, x_d) = f(-x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (4.5)$$

Insbesondere ist für eine Eigenfunktion  $\psi$  von  $H$

$$H\psi = \lambda\psi, \quad E < 0$$

auch ihre Spiegelung  $\Pi\psi$  eine Eigenfunktion zum selben Eigenwert. Falls  $\psi$  bei  $a_1$  lokalisiert ist, wird  $\Pi\psi$  bei  $a_2$  lokalisiert sein. Im Allgemeinen weist ein  $\phi$  aus dem Eigenraum  $\text{Lin}\{\psi, \Pi\psi\}$

$$\phi = a\psi + b\Pi\psi$$



sowohl bei  $a_1$  als auch bei  $a_2$  große Beträge auf, selbst wenn der Abstand  $\varrho$  zwischen den Potentialtöpfen groß ist. Kurz gesagt, eine Eigenfunktion von  $H$  muß nicht in der Nähe nur *eines* Punktes lokalisiert sein. Es handelt sich um eine Resonanz zwischen den beiden Gebieten  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$  bzw. den entsprechenden Schrödinger-Operatoren

$$H_i = -\Delta + V_i, \quad i = 1, 2.$$

Wegen der unitären Ähnlichkeit der linearen Abbildungen  $H_1$  und  $H_2$  sind die Spektren  $\sigma_1, \sigma_2$  identisch, daher gilt trivialerweise  $d(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ .

Allerdings ist  $V_1 + V_2$  mit der Eigenschaft (4.3) eine Potentialkonfiguration mit einer zusätzlichen Symmetrie — ein Ereignis, das bei *zufälligen* Medien sehr selten vorkommen sollte. D.h. in einer typischen Potentialkonfiguration erwartete man, daß sich die Spektren der beiden Operatoren  $H_1, H_2$  nicht zu nahe kommen und die Eigenfunktionen *ein einziges* Lokalisations-Zentrum besitzen.

2. Wir geben eine Bedingung an, die sicherstellt, daß Eigenfunktionen von  $H$  wie in (4.4) nur bei einer der beiden Potentialmulden  $V_1, V_2$  lokalisiert sind: Die diskreten Spektren  $\sigma_i := \sigma_{pp}(H_i) = \sigma(H_i) \cap ]-\infty, 0[$ ,  $i = 1, 2$  dürfen nicht allzu nahe beieinander liegen, d.h.

$$d(\sigma_1, \sigma_2) \geq e^{-\sqrt{\varrho}} =: \epsilon. \quad (4.6)$$

Die Beschränkung auf das diskrete bzw. negative Spektrum ergibt sich, da wir nur negative Eigenwerte betrachten. Für einen Eigenzustand  $\psi$ ,  $H\psi = \lambda\psi$ ,  $\lambda < 0$  gilt dann ohne Einschränkung

$$|\lambda_1^j - \lambda| \geq \epsilon/2, \quad \forall \lambda_1^j \in \sigma_1. \quad (4.7)$$

(Die Bedingung muß wegen (4.6) entweder für alle  $\lambda_1^j \in \sigma_1$  oder alle  $\lambda_2^j \in \sigma_2$  gelten.) Aus der Eigenwertgleichung folgt nun

$$-\psi = (H_1 - \lambda)^{-1} V_2 \psi$$

und durch zweimaliges Anwenden der Resolventengleichung erhält man

$$-\psi = [R_0 - R_0 V_1 R_0 + R_0 V_1 R_1 V_1 R_0] V_2 \psi, \quad (4.8)$$

wobei  $H_0 := -\Delta$  der freie Hamilton-Operator und  $R_i := (H_i - E)^{-1}$ ,  $i = 0, 1, 2$  die Resolventen sind.

Wir zeigen nun, daß der Betrag von  $\psi$  auf  $\mathcal{V}_1$  exponentiell klein in dem Parameter  $\varrho$  ist (vgl. auch 4. in Bemerkung 4.1.2). Sei  $\chi(i)$  die charakteristische Funktion von  $\mathcal{V}_i$  für  $i = 1, 2$ . Wir multiplizieren die Gleichung

(4.8) mit  $\chi(1)$  und erhalten

$$\begin{aligned} -\chi(1)\psi &= \chi(1)R_0\chi(2)V_2\psi - \chi(1)R_0V_1\chi(1)R_0\chi(2)V_2\psi \\ &\quad + \chi(1)R_0V_1R_1V_1\chi(1)R_0\chi(2)V_2\psi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die freie Resolvente fällt exponentiell ab, siehe [Agm82] oder Gleichung (IX.30) in [RS75]

$$R^{1,2} := \|\|\chi(1)R_0\chi(2)\|\| \lesssim e^{-\varrho\sqrt{-E}},$$

die Terme  $\|V_2\psi\|$ ,  $\|\|\chi(1)R_0V_1\|\|$  besitzen eine  $\varrho$ -unabhängige obere Schranke und aus der Annahme (4.7) folgt

$$\|\|R_1\|\| \leq \frac{2}{\epsilon} = 2e^{\sqrt{\varrho}}.$$

Dies impliziert, daß

$$\begin{aligned} \|\|\chi(1)\psi\|\| &\leq R^{1,2} \|V_2\psi\| + \|\|\chi(1)R_0V_1\|\| R^{1,2} \|V_2\psi\| \\ &\quad + \|\|\chi(1)R_0V_1\|\| \|\|R_1V_1\|\| R^{1,2} \|V_2\psi\| \end{aligned}$$

bis auf ein Konstante durch  $\exp(-\sqrt{\varrho})$  beschränkt ist für  $\varrho \geq (-E)^{-1}$ . Eine genaue Untersuchung des letzten Summanden in (4.9) ergibt sogar einen stärkeren Abfall der Form  $\exp(-\varrho\sqrt{-E})$ .

Die Analogie zwischen diesem Beispiel und der Multiskalen-Analyse besteht darin, daß bei beiden von einer schon untersuchten Resolvente auf die Abfalleigenschaften einer anderen Resolvente geschlossen wird.

- Im Beispiel wird von der freien Resolvente auf diejenige mit Potential geschlossen — bzw. auf die entsprechende Eigenfunktion.
- Bei der Multiskalen-Analyse wird von der Resolvente auf einem kleinen Würfel  $\Lambda_l$  auf diejenige auf einem großen Würfel  $\Lambda_L$  geschlossen.

Im Beispiel sehen wir, daß Resonanzen, d.h. das Ereignis

$$d(\sigma_1, \sigma_2) < \epsilon,$$

bewirken, daß man den gewünschten Schluß nicht ziehen kann. Daher ist es für die Multiskalen-Analyse notwendig, die Wahrscheinlichkeit der Menge

$$\{\omega \mid d(\sigma(H_\omega^l), E) < \epsilon\}$$

abzuschätzen.

**Bemerkung 4.1.2**

1. Das obige Beispiel ist angelehnt an Bemerkungen auf den Seiten 903-904 von Spencers Übersichtsartikel [Spe86] über das diskrete Anderson-Modell und den Vortrag [Mül00]. Im Kapitel 12 des Buches [HS96] findet man eine Diskussion von Zwei-Mulden Potentialen und der zugehörigen Eigenfunktionen unter dem Blickwinkel der semiklassischen Analysis.
2. Bei dem symmetrischen Potential (4.3) besitzt die Eigenfunktion  $\psi$  eine nichtverschwindende Amplitude in beiden Potentialtöpfen. Deren Betragsquadrat  $|\psi(x)|^2$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthalt eines Elektrons im Zustand  $\psi$  mit Energie  $\lambda < 0$  am Ort  $x$ . Daß diese positiv ist in beiden Potentialmulden, wird als Tunnel-Effekt bezeichnet. Klassisch gesehen könnte sich ein Elektron nur in einer der beiden Mulden befinden, und auch nicht durch die Zeitentwicklung in die andere gelangen, da die Gesamtenergie des Elektrons  $\lambda$  kleiner ist als die Potentialschwelle  $V = 0$ .
3. Im Allgemeinen kann man aus der im Spektrum enthaltenen Information nur wenig über die Geometrie der Eigenvektoren folgern. In unserem Beispiel ist es die zusätzliche Information (4.2) über die Potentialkonfiguration, welche es erlaubt, aus der spektralen Bedingung (4.6) bzw. (4.7) auf geometrische Eigenschaften der Eigenfunktion zu schließen.
4. Natürlich klingen die Eigenfunktionen  $\psi(x)$  von  $H$  auch im Fall des symmetrischen Potentials (4.3) exponentiell im Konfigurationsraum ab, d.h. bezüglich der Ortsvariablen  $x$ . Dieser Abfall setzt aber noch nicht auf der Längenskala  $\varrho$  ein, denn der Wert

$$|\psi(a_1)\psi(a_2)|$$

wird nicht gegen 0 gehen für  $\varrho \rightarrow \infty$ . Dagegen wird im nicht-resonanten Fall (4.6) die Amplitude entweder bei  $a_1$  oder bei  $a_2$  klein in dem Parameter  $\varrho$

$$|\psi(a_1)\psi(a_2)| \lesssim e^{-\varrho\sqrt{-E}}.$$

Wegners Abschätzung wird benutzt, um zu zeigen, daß Resonanzen mit großer Wahrscheinlichkeit *nicht* vorkommen, so daß die Multiskalen-Analyse durchführbar bleibt. Sie ist eine obere Schranke an die Wahrscheinlichkeit, Eigenwerte eines restringierten Operators in einem kleinem Energieintervall  $I$  anzutreffen:

$$\mathbb{P}\{\sigma(H_\omega^l) \cap I \neq \emptyset\} \leq C |I| l^d. \quad (4.10)$$

Man stelle sich unter  $I$  eine kleine Umgebung  $]E - \epsilon, E + \epsilon[$  der Energie  $E$  vor. Hierbei ist  $H_\omega^l$  im kontinuierlichen Fall die Einschränkung von  $H_\omega$  auf  $L^2(\Lambda_l)$  mit Dirichlet-Randbedingungen und im diskreten die endliche Teilmatrix  $H_\omega^l := \{h_\omega(j, k), j, k \in \tilde{\Lambda}\}$  von  $h_\omega$ . Man kann statt der Dirichlet Randbedingungen für  $H_\omega^l$  ebenso Neumann- oder periodische Randbedingungen wählen, sämtliche Abschätzungen in diesem Kapitel sind auch in diesen Fällen gültig. Man bemerke, daß  $l^d$  das Volumen des Würfels  $\Lambda_l$  ist. Eine mögliche Interpretation von (4.10) ist, daß es bezüglich des Parameters  $\omega$  keine Clusterbildung von Eigenwerten auf der Energieachse gibt. Diese Schranke läßt sich mit Hilfe der Čebyšev-Ungleichung leicht auf eine Abschätzung der integrierten Zustandsdichte zurückführen.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\sigma(H_\omega^l) \cap I \neq \emptyset\right\} &= \mathbb{P}\left\{\text{Tr}P_\omega^l(I) \neq 0\right\} \\ &\leq \mathbb{E}\left(\text{Tr}P_\omega^l(I)\right) = |\Lambda_l| \mathbb{E}\left(N_\omega^l(E_2) - N_\omega^l(E_1)\right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

falls  $I = [E_1, E_2[$ . In diesem Kapitel werden wir eine obere Schranke an (4.11) herleiten. Für die Multiskalen-Analyse reichen wesentlich schwächere Aussagen als (4.10), so reicht es zum Beispiel für beliebige  $a \in ]0, 1], b \in [1, \infty[$

$$\mathbb{P}\{\sigma(H_\omega^l) \cap I \neq \emptyset\} \leq C |I|^a |\Lambda_l|^b \quad (4.12)$$

zu zeigen. Da wir uns für kleine Energieintervalle  $I$  und große Würfel  $\Lambda$  interessieren, liefert der Fall  $a = b = 1$  die schärfste Schranke. Je nach den Eigenschaften von  $V_\omega$  ist es jedoch nicht immer möglich, diese zu erzielen. Der Energie-Exponent  $a$  wird schlechter, je weniger Regularität man für die Dichte  $f$  der Kopplungskonstanten fordert. So erzielt [KoS87] im Fall  $L^p$ -integrierbarer  $f$  eine Abschätzung (4.12) mit  $a = 1 - 1/p$ . Resultate für Hölder-stetige Maße  $\mu$  findet man in [Sto00]. Der Exponent  $b$  für die Volumen-Abhängigkeit hängt von den Voraussetzungen an das Einzelplatz-Potential  $u$  ab. Bereits in Abschnitt 2.3 erwähnten wir die Resultate [Klo95c, Kir96]. Beide beinhalten eine Wegner-Abschätzung für Einzelplatz-Potentiale  $u$ , welche nicht uniform positiv auf dem Einheitswürfel sind. Die erzielten Schranken wachsen schneller als linear im Volumen  $|\Lambda|$  an. Vergleiche auch Satz 2.1.17 und Bemerkung 2.1.18.

### Bemerkung 4.1.3 (Intuitive Gründe für Wegners Abschätzung)

Wir versuchen zu beleuchten, welche Rolle ein Vorzeichenwechsel des Einzelplatz-Potentials für die Herleitung des Lemmas von Wegner spielt. Dazu schauen wir uns das einfachste Legierungs-Potential an, welches zuerst von Holden und Martinelli untersucht wurde [MH84]: Das Einzelplatz-Potential  $u$  ist die charakteristische Funktion  $\chi_0$  des Einheitswürfels  $\Lambda := [0, 1]^d$  am Nullpunkt und

die Kopplungskonstanten  $\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d$  sind gleichverteilt im Intervall  $[0, 1]$ . D.h.

$$V_\omega(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_k \chi_k(x), \quad (4.13)$$

wobei  $\chi_k(x) := \chi_0(x - k)$  ist. Wir führen die Eigenschaften eines Potentials an, welche bei Wegners Argumenten benutzt werden. Bei diesem konkretem Beispiel sind sie zum Teil trivial. Das Augenmerk wird dabei auf die physikalische Motivation gelegt und die Formulierung ist mathematisch salopp.

- (I) Die Einheitswürfel  $\{\Lambda + k \mid k \in \mathbb{Z}^d\}$  bilden eine Überdeckung  $\mathcal{L}$  des Konfigurationsraumes  $\mathbb{R}^d$ .
- (II) Auf dem Einheitswürfel  $\Lambda + k$  ist das Einzelplatz-Potential  $\chi_k$  von unten durch eine positive Konstante beschränkt.
- (III) Daher hängt der Potential-Anteil

$$V_\omega|_{\Lambda+k} = \omega_k \chi_k$$

*monoton* von der Unordnungskomponente  $\omega_k$  ab.

- (IV) Die Dichte der Kopplungskonstante  $\omega_j$  ist absolutstetig und durch eine Konstante  $K$  beschränkt .
- (V) Aus (III) und dem Min-Max-Prinzip folgt, daß die Eigenwerte von  $H_\omega^l$

$$\omega_k \mapsto \lambda_i(H_\omega^l)$$

monotone Funktionen der einzelnen Kopplungskonstanten sind.

- (VI) Um zu zeigen, daß die Eigenwerte auf der Energieachse „stetig“ verteilt sind — dies ist die Aussage der Wegner-Abschätzung — gilt es (III) zu verschärfen: Die Änderung der Eigenwerte unter der Variation der Gesamtheit der Unordnungsparameter sollte von unten beschränkt sein:

$$\left\| \frac{\delta \lambda_n(H_\omega^l)}{\delta \omega} \right\| \geq C > 0. \quad (4.14)$$

- (VII) Sei  $F$  eine Funktion eines Eigenwertes  $\lambda_i(H_\omega^l)$  von  $H_\omega^l$ . Die Mittelung über den Zufall sollte einer Mittelung über die Energie entsprechen. Der intuitive Grund, dies zu erwarten, wird anhand der folgenden „Physiker-

Rechnung“ deutlich.

$$\begin{aligned}
 \int F(\lambda_i(H_\omega^l)) \delta\mathbb{P}(\omega) &= \int F(\lambda_i(H_\omega^l)) \frac{d\mathbb{P}(\omega)}{d\omega} \delta\omega \\
 &\leq K \int F(\lambda_i(H_\omega^l)) \delta\omega \\
 &= K \int F(\lambda_i(H_\omega^l)) \frac{\delta\omega}{\delta\lambda_i(H_\omega^l)} \delta\lambda_i(H_\omega^l) \\
 &\leq \frac{K}{C} \int F(\lambda) \delta\lambda.
 \end{aligned}$$

Also „verschmiert“ der Erwartungswert über den Zufall die Spektralwerte auf der Energieachse.

(VIII) Das obige Vorgehen wird in [Weg81] für das Anderson-Modell und in [Kir96] für das Legierungs-Modell implementiert. Wir folgen einer Modifikation der Strategie, welche man in [KoS87] und [CH94] findet. Dort wird aus technischen Gründen statt der Eigenwerte oder der zugehörigen Eigenprojektoren die Resolvente über den Zufall gemittelt.

Falls man ein Legierungs-Modell mit andersartigen Einzelplatz-Potentiale oder ein allgemeineres zufälliges Potential untersucht, führt unter Umständen eine Anpassung der obigen Argumentation zum Erfolg.

(i) Zu einer Überdeckung  $\mathcal{L} = \{\mathcal{A}_k | k \in \mathbb{N}\}$  des  $\mathbb{R}^d$  sollte man

(i),(iii),(v) Komponenten  $\xi_k$  des Zufalls  $\omega$  finden, so daß die Abbildung

$$\xi_k \mapsto V_\omega|_{\mathcal{A}_k}$$

monoton ist. Unter einer „Komponente“  $\xi_k$  der Unordnung verstehen wir eine Funktion

$$\xi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \xi_k(\omega) = \xi_k.$$

Diese Eigenschaften entsprechen den Punkten (II), (III) und (V).

(iv) Analog zu (IV) soll gelten, daß für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Zufallsvariable  $\xi_k$  bezüglich der übrigen Unordnung eine beschränkte Dichte besitzt. Im Fall von (4.13) spielen die Zufallsvariablen  $\omega_k$  die Rolle der  $\xi_k$ . Wegen der Unabhängigkeit der Variablen stimmt die bedingte Dichte mit der gewöhnlichen Dichte überein.

(vi),(vii) Ähnlich wie in (VI) und (VII) muß man die Mittelung über den Zufall auf eine Mittelung in der Energie zurückführen können.

## 4.2 Vorbereitende Abschätzungen

In diesem Abschnitt stellen wir einige vorbereitende Abschätzungen für

$$\mathbb{E} \left\{ \text{Tr} P_\omega^l(I) \right\} \quad (4.15)$$

vor. Sie setzen die im Abschnitt 4.1 vorgestellte Idee zur Partition des Raumes in Teilmengen  $\mathcal{A}_k$  um, auf denen man einen Zufalls-Parameter finden kann, der das Potential monoton beeinflusst. Sie sind im wesentlichen [CH94] entnommen.

Im Weiteren können wir uns auf den Fall beschränken, daß die Funktion  $w$  aus Annahme 2.1.C gleich der charakteristischen Funktion  $\chi_0$  von  $[0, 1]^d$  ist. Dies liegt daran, daß in den folgenden Betrachtungen nur die untere Schranke an  $w$  innerhalb des Würfels  $[0, 1]^d$  eine Rolle spielt. Am Ende des Beweises gehen wir in Bemerkung 4.5.3 auf die Anpassungen ein, die für allgemeines  $w$  nötig sind.

Für ein beschränktes, offenes Intervall  $I = ]E_1, E_2[$  gilt nach dem Spektralsatz

$$P_\omega^l(I) \leq e^{E_2} P_\omega^l(I) e^{-H_\omega^l}. \quad (4.16)$$

Diese Ungleichung überträgt sich auf die Spuren der Operatoren. Den Würfel  $[0, 1]^d$  bezeichnen wir der Kürze halber mit  $\Lambda$ . Nun führen wir entsprechend der Zerlegung

$$L^2(\Lambda_l) = \bigoplus_{j \in \tilde{\Lambda}_l} L^2(\Lambda + j)$$

Operatoren  $H_{\omega,j}$  auf  $L^2(\Lambda + j)$  ein, die Neumann-Randbedingungen besitzen. Dirichlet-Neumann-Bracketing ergibt

$$H_\omega^l \geq \bigoplus_{j \in \tilde{\Lambda}_l} H_{\omega,j} =: \oplus H. \quad (4.17)$$

Anders gesagt, die Einführung von Neumann-Flächen in  $\Lambda_l$  senkt die Eigenwerte.

Für einen normierten Eigenvektor  $\phi$  von  $H_\omega^l$  mit Eigenwert  $\lambda$  gilt

$$\begin{aligned} \langle \phi, e^{-H_\omega^l} \phi \rangle &= e^{-\lambda} \\ &= e^{\langle \phi, -H_\omega^l \phi \rangle} \\ &\leq e^{\langle \phi, -\oplus H \phi \rangle}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Anwendung von Jensens Ungleichung auf das Spektralmaß von  $\oplus H$  liefert für (4.18) die obere Schranke

$$\langle \phi, e^{-\oplus H} \phi \rangle.$$

Da die Eigenfunktionen  $\phi_n, n \in \mathbb{N}$  von  $H_\omega^l$  eine Orthonormalbasis bilden, folgt für die Spur

$$\mathrm{Tr} \left[ P_\omega^l(I) e^{-H_\omega^l} \right] \leq \mathrm{Tr} \left[ P_\omega^l(I) e^{-\oplus H} \right]. \quad (4.19)$$

Sei nun  $\{\psi_{j,n}, n \in \mathbb{N}\}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(\Lambda + j)$ , dann ist  $\{\psi_{j,n}, j \in \tilde{\Lambda}_l, n \in \mathbb{N}\}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(\Lambda_l)$ . Es gilt  $e^{-\oplus H} \psi_{j,n} = e^{-H_{\omega,j}} \psi_{j,n} = \chi_j e^{-H_{\omega,j}} \chi_j \psi_{j,n}$  und für die Spur folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} \left[ P_\omega^l(I) e^{-\oplus H} \right] &= \sum_{j \in \tilde{\Lambda}_l} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \psi_{j,n}, P_\omega^l(I) e^{-\oplus H} \psi_{j,n} \rangle \\ &= \sum_{j \in \tilde{\Lambda}_l} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \psi_{j,n}, \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j e^{-H_{\omega,j}} \chi_j \psi_{j,n} \rangle \\ &= \sum_{j \in \tilde{\Lambda}_l} \mathrm{Tr} \left[ \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j e^{-H_{\omega,j}} \chi_j \right]. \end{aligned}$$

Wir halten das Zwischenergebnis fest:

$$\mathrm{Tr} P_\omega^l(I) \leq e^{E_2} \sum_{j \in \tilde{\Lambda}_l} \mathrm{Tr} \left[ \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j e^{-H_{\omega,j}} \chi_j \right]. \quad (4.20)$$

Aus Abschnitt 1.3.3 wissen wir, daß  $V_\omega$   $\omega$ -gleichmäßig infinitesimal  $\Delta$ -beschränkt ist. Insbesondere folgt, daß Konstanten  $c_1, c_2$  existieren, welche nur von  $\omega_+$  und  $u$  abhängen und

$$H_{\omega,j} \geq H_{0,j} + c_1 \geq c_2$$

erfüllen. Ebenso ist die Dimension von  $P_\omega^l(I) L^2(\Lambda_l)$  durch eine  $\omega$ -unabhängige Konstante  $C < \infty$  beschränkt.<sup>1</sup> Es folgt:

$$\mathrm{Tr} \left[ \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j e^{-H_{\omega,j}} \chi_j \right] \leq C e^{-c_2}$$

Die Majorante  $C e^{-c_2}$  ist in  $L^1(\Omega)$  und wir können den Satz von Lebesgue anwenden, um Erwartungswert und Spur zu vertauschen.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \mathrm{Tr} \left[ \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j e^{-H_{\omega,j}} \chi_j \right] \right\} &= \mathrm{Tr} \left[ \mathbb{E} \left\{ \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j e^{-H_{\omega,j}} \chi_j \right\} \right] \\ &\leq \mathrm{Tr} \left[ \mathbb{E} \left\{ \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j \right\} \chi_j e^{-c_1 - H_{0,j}} \chi_j \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Für nicht-negative Operatoren  $A, B$  gilt  $\mathrm{Tr}(AB) \leq \|A\| \mathrm{Tr} B$ . Die Anwendung auf  $\mathbb{E} \left\{ \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j \right\}$  und  $\chi_j e^{-c_1 - H_{0,j}} \chi_j$  liefert

$$\left\| \mathbb{E} \left\{ \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j \right\} \right\| e^{-c_1} \mathrm{Tr} e^{-H_{0,j}} \quad (4.22)$$

als obere Schranke für (4.21), wobei die Spur auf dem Raum  $L^2(\Lambda + j)$  genommen wird.

<sup>1</sup>Man beachte, daß das Intervall  $I$  beschränkt ist.



**Bemerkung 4.2.1**

Nun ist ersichtlich, warum der Operator  $e^{E_2} e^{-H_\omega^l}$  künstlich in (4.16) eingeführt wurde. Von dem Projektor  $P_\omega^l(I)$  geht in (4.22) statt der Spur nur noch die Operator-Norm ein. Für diese liegt die im nächsten Kapitel vorgestellte Technik der spektralen Mittelung vor. Alternativ hätte man auch die Strategie von [Kir96] verfolgen können, welche eine Mittelung der Spur vornimmt.

Mit Hilfe der geometrischen Reihe berechnet man wie in [RS78, Theorem 76], daß die Spur von  $e^{-H_{0,j}}$  endlich ist, d.h.  $\text{Tr } e^{-H_{0,j}} \leq C_{\text{Tr}}$ . Nun benötigt man eine obere Schranke an die Operatornorm von  $\mathbb{E} \{ \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j \}$ . Diese stimmt überein mit einer Abschätzung an die quadratische Form

$$\sup_{\phi} \langle \phi, \mathbb{E} \{ \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j \} \phi \rangle, \quad (4.23)$$

wobei  $\phi$  über alle normierten Vektoren in  $L^2(\Lambda + j)$  variiert.

Da Resolventen analytisch besser zu handhaben sind als Spektralprojektoren, greifen wir auf Stones Darstellungsformel zurück.

**Lemma 4.2.2**

Für einen selbstadjungierten Operator  $H$  mit Spektralfamilie  $P(\cdot)$  gilt im starken Sinne der Grenzübergang

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{E_1}^{E_2} [(H - E - i\delta)^{-1} - (H - E + i\delta)^{-1}] dE \\ = \frac{1}{2} [P([E_1, E_2]) + P(]E_1, E_2[)]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

**Beweis:**

Die Funktion

$$\begin{aligned} f_\delta(x) &:= \frac{1}{\pi} \left( \arctan \frac{x - E_1}{\delta} - \arctan \frac{x - E_2}{\delta} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{E_1}^{E_2} [(x - E - i\delta)^{-1} - (x - E + i\delta)^{-1}] dE \\ &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int_{E_1}^{E_2} (x - E + i\delta)^{-1} dE \end{aligned} \quad (4.25)$$

konvergiert für  $\delta \searrow 0$  gegen

$$\frac{1}{2} (\chi_{[E_1, E_2]} + \chi_{]E_1, E_2[}).$$

Nun wendet man den Spektralsatz auf  $f_\delta(H)$  an.

**q.e.d.**

Eine eingehende Diskussion der Formel von Stone findet man in [RS80] und [Wei80].

**Bemerkung 4.2.3**

Im Abschnitt 4.5 werden wir eine Schranke an (4.23) finden, welche unabhängig ist von  $j$ . Dann liefert die Summe über  $j \in \tilde{\Lambda}_l$  in (4.20) den Faktor  $\#\tilde{\Lambda}_l$ .

**4.3 Spektrale Mittelung**

In diesem Abschnitt stellen wir die Technik der spektralen Mittelung vor. Sie besagt, daß — unter gewissen Voraussetzungen — das Spektrum des Operators  $H_\omega^l$  bei der Integration über  $\omega$  auf der Energieachse „verschmiert“ wird. Bei den Eigenwerten hat die Resolvente  $(H_\omega^l - z)^{-1}$  nicht-integrierbare Singularitäten in der Variablen  $E = \operatorname{Re} z$ . Durch die spektrale Mittelung können diese Singularitäten regularisiert werden.

Sei  $\nu$  ein endliches Borel-Maß auf  $\mathbb{R}$ ,  $H(\zeta)$  eine mit  $\zeta \in \mathbb{R}$  parametrisierte Familie von selbstadjungierten Operatoren auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $P(H(\zeta), I)$  der zugehörige Spektralprojektor auf das Energieintervall  $I := ]E_1, E_2[$ . Für einen Vektor  $\psi$  aus  $\mathcal{H}$  schreiben wir  $\mathcal{P}(\zeta) := \langle \psi, P(H(\zeta), I)\psi \rangle$ . Mit Stones Formel und dem Satz von Lebesgue folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} d\nu(\zeta) \mathcal{P}(\zeta) &\leq - \int_{\mathbb{R}} d\nu(\zeta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_I dE [\langle \psi, (H(\zeta) - E + i\delta)^{-1} \psi \rangle] \\ &\leq \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_I \int_{\mathbb{R}} d\nu(\zeta) [\langle \psi, (H(\zeta) - E + i\delta)^{-1} \psi \rangle] dE \right|. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Aus (4.25) liest man ab, daß  $|f_\delta(\cdot)|$  und damit auch  $\|f_\delta(H(\zeta))\|$  durch Eins beschränkt sind. Es liegt also eine  $\nu$ -integrierbare Majorante vor und man darf den Grenzwert mit der Erwartung vertauschen.

Sei nun  $H$  ein fester selbstadjungierter Operator,  $W$  symmetrisch und infinitesimal  $H$ -beschränkt,  $J$  nicht-negativ und beschränkt mit  $J^2 \leq W$ . Weiterhin seien  $z \in \mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ ,  $\zeta \in \overline{\mathbb{C}_+} := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$  und

$$H(\zeta) := H + \zeta W, \quad K(\zeta, z) := J(H(\zeta) - z)^{-1} J. \quad (4.27)$$

Dann gilt

$$\|K(\zeta, z)\| \leq \min [(-\operatorname{Im} z)^{-1}, (\operatorname{Im} \zeta)^{-1}]. \quad (4.28)$$

Für beschränktes  $W$  ist dies Ungleichung (4.5) in [CH94]. In unserem Fall gehen die Rechnungen formal genauso und sämtliche vorkommende Operatoren sind wegen der Beschränktheit von  $W(H(\zeta) - z)^{-1}$  auf ganz  $\mathcal{H}$  definiert.

Sei  $g: \overline{\mathbb{C}_+} \rightarrow \mathbb{C}$  eine beschränkte holomorphe Funktion. Aus dem Residuensatz folgt, daß

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{g(\zeta)}{1 + \zeta^2} d\zeta \right| = \pi |g(i)| \quad (4.29)$$

ist. Da für alle  $z \in \mathbb{C}_-$  die Funktion  $K(\cdot, z)$  holomorph ist auf  $\overline{\mathbb{C}_+}$  können wir (4.28) und (4.29) kombinieren und erhalten für alle normierten  $\phi \in \mathcal{H}$

$$\varkappa(z) := \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t\zeta^2} \langle \phi, K(\zeta, z)\phi \rangle d\zeta \right| \leq \pi. \quad (4.30)$$

**Bemerkung 4.3.1**

Falls man  $z = E - i\delta \in \overline{\mathbb{C}_-}$  setzt, ist die Schranke (4.30) unabhängig von  $\delta > 0$ . Insbesondere gibt es bei den Eigenwerten von  $H(\zeta)$  keine Singularitäten der Funktion  $\varkappa: \overline{\mathbb{C}_-} \rightarrow \mathbb{R}$ . Damit hat im Fall der abstrakten Operatorfamilie (4.27) die spektrale Mittelung mit dem Maß  $d\nu(\zeta) = \frac{d\zeta}{1+t\zeta^2}$  ihren Zweck erfüllt. Falls man Folgerungen für die Familie  $H_\omega^l$  schließen will, ist unklar, welche Operatoren die Rolle von  $W$  und  $J$  übernehmen können. Der „natürliche“ Kandidat  $W = u(\cdot - j)$  erfüllt i.a. die Bedingung  $W \geq 0$  nicht. Im nächsten Abschnitt 4.4 extrahieren wir aus der Familie  $H_\omega^l$  zwei Operatoren  $J$  und  $W$ , welche die Annahme  $0 \leq J^2 \leq W$  erfüllen.

Um aus der Schranke (4.30) Informationen über den Spektralprojektor zu bekommen, setzen wir in (4.26)  $\nu(\zeta) = \frac{d\zeta}{1+t\zeta^2}$  und  $\psi = J\phi$  ein. Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}} d\zeta \frac{\mathcal{P}(\zeta)}{1+t\zeta^2} \leq |I| \quad (4.31)$$

Wir lösen uns von der künstlich eingeführten Dichte  $\frac{d\zeta}{1+t\zeta^2}$  und passen die Abschätzung für allgemeine Dichten  $\rho \in L_0^1(\mathbb{R})$  an.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \rho(\zeta) \mathcal{P}(\zeta) d\zeta &\leq \sup_{\text{supp}\rho} [\rho(\zeta)(1+t\zeta^2)] \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{P}(\zeta)}{1+t\zeta^2} d\zeta \\ &\leq \sup_{\text{supp}\rho} [\rho(\zeta)(1+t\zeta^2)] |I| \end{aligned}$$

Der Grenzübergang  $t \searrow 0$  ergibt:

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(\zeta) \mathcal{P}(\zeta) d\zeta \leq \|\rho\|_\infty |I|. \quad (4.32)$$

Man kann die Kompaktheit des Trägers von  $\rho$  entbehren. Dazu schreiben wir  $\rho = \rho^y + \rho_y$ ,  $\rho^y = \rho \chi_{\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < y\}}$ . Für  $y \rightarrow \infty$  gilt  $\rho_y \rightarrow 0$  punktweise. Wegen  $|\mathcal{P}(\zeta)| \leq 1$  haben wir in  $\rho(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}, d\zeta)$  eine  $y$ -unabhängige Majorante für  $\rho_y(\cdot)\mathcal{P}(\cdot)$  und können den Satz von Lebesgue anwenden. Es folgt

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \rho_y(\zeta) \mathcal{P}(\zeta) d\zeta = 0$$

und daher

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(\zeta) \mathcal{P}(\zeta) d\zeta \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \rho^y(\zeta) \mathcal{P}(\zeta) d\zeta \leq \|\rho\|_\infty |I|. \quad (4.33)$$

#### 4.4 Transformation der Zufallsvariablen

Im vorliegenden Abschnitt führen wir eine *Transformation der Zufallsvariablen*  $\{\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d\}$  ein. Sie kann als ein invertierbarer linearer Operator  $A$  auf  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \supset \Omega$  aufgefaßt werden.<sup>2</sup> Da  $(\Omega, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, ändert die Abbildung  $A$  auch das Maß  $\mathbb{P}$ . Konkret bedeutet das, daß wir die gemeinsame Dichte der transformierten Variablen berechnen müssen.

Der Raum  $\Omega = [0, \omega_+]^{\mathbb{Z}^d} = \{\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d\}$  bzw.  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$  besitzt eine natürliche Vektorraum-Struktur. Der Faltungsvektor  $\alpha$  aus Annahme 2.1.C erzeugt eine (Block-)Toeplitz-Matrix.

$$A := \{a_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}^d}, \quad a_{j,k} := \alpha_{j-k} \quad (4.34)$$

Diese wirkt auf  $\Omega$  und bildet den Vektor  $\omega = \{\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d\}$  der zufälligen Kopplungskonstanten auf

$$\eta := A\omega, \quad \eta_j = (A\omega)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \alpha_{j-k} \omega_k \quad (4.35)$$

ab. Wie sich in Abschnitt 4.5 herausstellen wird, ist es angemessen, die Matrix  $A$  mit der Spaltensummennorm

$$\|A\| := \|A\|_1 := \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |a_{j,k}| \quad (4.36)$$

zu versehen. Aus den Bedingungen (2.12) an  $\alpha$  folgt, daß  $A$  die Summe der Identität  $\text{Id}$  und einer Matrix  $S$  mit verschwindenden Diagonaleinträgen ist,

$$A =: \text{Id} + S, \quad (4.37)$$

und daß wir  $S$  als kleine Störung von  $\text{Id}$  auffassen können

$$\|S\| = \sum_{j \neq 0} |\alpha_j| = \alpha^* < 1. \quad (4.38)$$

Die Neumannsche Reihe zeigt, daß  $B = A^{-1} = (\text{Id} + S)^{-1}$  existiert und beschränkt ist durch

$$\|B\| \leq \frac{1}{1 - \alpha^*}. \quad (4.39)$$

Dabei benutzt man, daß  $\|\cdot\|_1$  als Operatornorm auf  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \supset \Omega$ , versehen mit der Summennorm  $\|\omega\|_1 := \sum_k |\omega_k|$ , submultiplikativ ist. Der Definitionsbereich von  $A$  ist  $l^1(\mathbb{Z}^d)$ . Für unsere Zwecke reicht es, nur Vektoren  $\omega$  in  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$  zu betrachten,

<sup>2</sup>Bezüglich der für unsere Zwecke geeigneten Norm ist dieser sogar beschränkt. Allerdings wird sich herausstellen, daß die entscheidende Rolle die Beschränktheit der Inversen spielt.

die nur endlich viele nicht-verschwindende Einträge besitzen. Die Schranke an die Inverse  $B$  wird in Abschätzungen des Abschnitts 4.5 eingehen.

Da wir Operatoren  $H_\omega^l$  betrachten, die auf endliche Würfel  $\Lambda = \Lambda_l$  eingeschränkt sind, liegt es nahe, die entsprechenden Restriktionen von  $A$  zu betrachten. Bezeichne  $\Lambda^+$  die Menge  $\Lambda - \Gamma := \{k - \gamma \mid k \in \tilde{\Lambda}, \gamma \in \Gamma\}$  derjenigen Gitterplätze in  $\mathbb{Z}^d$ , welche den Wert des Potentials im Würfel  $\Lambda$  beeinflussen. Zu der Einschränkung  $H_\omega^\Lambda$  gehört die trunkierte Matrix

$$A_\Lambda := \{a_{j,k}\}_{j,k \in \Lambda^+}, \quad a_{j,k} := \alpha_{j-k}. \quad (4.40)$$

Sie transformiert einen Teil des Vektors  $\omega$ :

$$(\eta_\Lambda)_j = (A_\Lambda \omega_\Lambda)_j = \sum_{k \in \Lambda^+} \alpha_{j-k} (\omega_\Lambda)_k,$$

wobei

$$\omega_\Lambda := \{\omega_k, k \in \Lambda^+\} \text{ und } \eta_\Lambda := \{\eta_k, k \in \Lambda^+\}$$

sind. Für die trunkierte Matrix gilt ebenso

$$A_\Lambda = \text{Id}_\Lambda + S_\Lambda, \quad \|S_\Lambda\| \leq \alpha^* < 1.$$

Daher existiert die Inverse  $B_\Lambda := A_\Lambda^{-1}$  mit der Normschranke  $\|B_\Lambda\| \leq (1 - \alpha^*)^{-1}$ . Für die endlichen Matrizen  $A_\Lambda, B_\Lambda$  sind die Determinanten

$$\det A_\Lambda, \det B_\Lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

wohldefiniert und wegen der Invertierbarkeit ungleich Null.

Da wir im weiteren einen festen Würfel  $\Lambda = \Lambda_l$  betrachten, kann man den Index  $\Lambda$  der Matrizen  $A_\Lambda, B_\Lambda$  und Vektoren  $\omega_\Lambda, \eta_\Lambda$  weglassen.

Wir berechnen die Wirkung der Transformation  $A$  auf die Dichte des Wahrscheinlichkeitsmaßes. Wegen der Unabhängigkeit der  $\omega_k, k \in \Lambda^+$  ist die gemeinsame Dichte das Produkt der Marginaldichten  $f$

$$F(\omega) := \prod_{k \in \Lambda^+} f(\omega_k).$$

Nach der Transformation  $A$  geht diese Produkt-Struktur verloren. Die neuen Zufallsvariablen  $\eta_k, k \in \Lambda^+$  besitzen die beschränkte gemeinsame Dichte

$$k = |\det A^{-1}| F \circ A^{-1}. \quad (4.41)$$

Der Träger der Dichte ist

$$M := A \left[ (\text{supp } f)^{\Lambda^+} \right] \subset \mathbb{R}^{\Lambda^+}. \quad (4.42)$$

Dies ist der Bereich über dem man integrieren muß, falls man über  $\eta_k, k \in \Lambda^+$  mittelt.

Das Motiv für die Transformation des Wahrscheinlichkeitsraumes wird ersichtlich, falls wir deren Auswirkung auf den Operator  $H_\omega^l$  anschauen. Um die Indizes der Operatoren auf  $L^2(\Lambda)$  zu entfrachten, schreiben wir  $\tilde{V}_\eta$  für  $V_{A^{-1}\eta}$  und  $\tilde{H}_\eta^l$  für  $H_{A^{-1}\eta}^l$ . Für  $x \in \Lambda$  ist

$$\begin{aligned} V_\omega(x) &= \sum_{k \in \Lambda^+} \omega_k \sum_{l \in \Gamma} \alpha_l \chi_{k+l}(x) \\ &= \sum_{j \in \tilde{\Lambda}} \chi_j(x) \sum_{k \in \Lambda^+} \alpha_{j-k} \omega_k \\ &= \sum_{j \in \tilde{\Lambda}} \eta_j \chi_j(x) \\ &= \tilde{V}_\eta(x). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Also gelten  $\tilde{V}_\eta = V_\omega$  und  $\tilde{H}_\eta^l = H_\omega^l$ . Man bemerke, daß es unwichtig ist, wie  $A$  auf Komponenten von  $\omega$  mit Index außerhalb von  $\Lambda^+$  wirkt. Diese haben keinen Einfluß auf das Potential innerhalb von  $\Lambda$ .

Wir haben also das Potential  $V_\omega$  mit *unabhängigen*, identisch verteilten Kopplungskonstanten  $\omega_k$  und Einzelplatz-Potential  $u$  mit wechselndem Vorzeichen in ein anderes Anderson-Potential  $\tilde{V}_\eta$  transformiert. Bei diesem ist das *Vorzeichen* des Einzelplatz-Potentials *fest*, aber die Kopplungskonstanten *korreliert*. Wegen  $\chi_j \geq 0$  ist das Potential (4.43) in den neuen Koordinaten monoton von den Parametern  $\eta_k, k \in \Lambda^+$  abhängig. Dies wollen wir nutzen, um  $\tilde{H}_\eta^l$  als Ein-Parameter Familie von Operatoren zu schreiben und die spektrale Mittelung aus 4.3 anzuwenden. Da

$$0 \leq \chi_j^2 \leq \chi_j = \tilde{V}_\eta|_{[0,1]^{d+j}}$$

gilt, kann man in (4.27)  $J = W = \chi_j$  und  $\zeta = \eta_j$  wählen, d.h.

$$\zeta := \eta_j \mapsto \tilde{H}_\eta^l, \quad K(\eta_j, z) = \chi_j (\tilde{H}_\eta^l - z)^{-1} \chi_j.$$

Unklar ist noch, wie man der Abhängigkeit der Dichte  $k_{\hat{\eta}}$  von  $\hat{\eta}$  Rechnung trägt. Dies erläutern wir im folgenden Abschnitt.

## 4.5 Abschätzung der Dichte

Im Abschnitt 4.3 wurde die Technik der spektralen Mittelung für monotone Operatorfamilien vorgestellt. Daraufhin zeigten wir in 4.4 wie man  $H_\omega^l$ , welches wegen der indefiniten Einzelplatz-Potentiale nicht monoton von den Kopplungskonstanten abhängt, in eine solche Familie transformiert. Die Abhängigkeit der neuen Zufallsvariable  $\eta_k$  ist der Preis, den wir dafür zu zahlen hatten.

In diesem Abschnitt benutzen wir einen Zwischenschritt, um zu zeigen, daß die Korrelation der Kopplungskonstanten das Resultat über spektrale Mittelung nicht zerstört.

Wir wählen nun ein festes  $j \in \Lambda^+$  und zeichnen die entsprechende Kopplungskonstante aus

$$\eta =: (\eta_j, \hat{\eta}), \quad (4.44)$$

wobei  $\hat{\eta}$  die übrigen Komponenten von  $\eta$  enthält.<sup>3</sup> Nach dem Satz von Fubini zerfällt dann das Integral über  $M$  in Beiträge von einzelnen Fasern

$$\int_M d\eta = \int_{\hat{M}} d\hat{\eta} \int_{M_{\hat{\eta}}} d\eta_j. \quad (4.45)$$

#### Bemerkung 4.5.1

Formal beschreibt man die Zerlegung (4.44) folgendermaßen. Seien für das fest gewählte  $j \in \Lambda^+$  die Projektionen  $\text{proj}, \text{proj}_\perp$  definiert durch

$$\text{proj}: \mathbb{R}^{\Lambda^+} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{proj}(\eta) = \eta_j \quad (4.46)$$

$$\text{proj}_\perp: \mathbb{R}^{\Lambda^+} \rightarrow \mathbb{R}^{\Lambda^+ - 1}, \quad \text{proj}_\perp(\eta) = \{\eta_k, k \in \Lambda^+ \setminus \{j\}\}. \quad (4.47)$$

Dann gilt  $\hat{\eta} = \text{proj}_\perp(\eta)$ . Die Integrationsbereiche (4.45) sind gegeben durch

$$\hat{M} := \text{proj}_\perp(M), \quad M_{\hat{\eta}} := \text{proj}(\text{proj}_\perp^{-1}(\hat{\eta}) \cap M) \quad (4.48)$$

oder in Koordinatenschreibweise

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \left\{ x = \{x_k, k \in \Lambda^+ \setminus \{j\}\} \in \mathbb{R}^{|\Lambda^+| - 1} \mid \right. \\ &\quad \left. \exists y \in \mathbb{R} : \eta = \left\{ \eta_k = \begin{cases} x_k, k \neq j \\ y, k = j \end{cases}, k \in \Lambda^+ \right\} \in M \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$M_{\hat{\eta}} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \eta = \left\{ \eta_k, k \in \Lambda^+ \setminus \{j\} \right\} \in M \right\}. \quad (4.50)$$

Gemäß der Zerlegung (4.44) schreibt sich die Dichte der Zufallsvariablen als  $k_{\hat{\eta}}(\eta_j) = k(\eta)$  und die  $\tilde{H}_{\hat{\eta}}^l$  kann man als Ein-Parameter Operator-Familie auffassen

$$\eta_j \mapsto \tilde{H}_{\hat{\eta}}^l(\eta_j) = \tilde{H}_{\eta}^l. \quad (4.51)$$

Wir führen die Abkürzung

$$\mathcal{P}(\eta) := \langle \phi, \chi_j \tilde{P}_{\eta}^l(I) \chi_j \phi \rangle. \quad (4.52)$$

<sup>3</sup>Vgl. die Beschreibung der Aufteilung des Raumes in Teilmengen  $\mathcal{A}_k$  und des Zufalls  $\xi$  in „geeignete“ Komponenten  $\xi_k$  aus Seite 78.

ein. Nach den Vorbereitungen in diesem und den letzten beiden Abschnitten können wir die Schranke an

$$\mathbb{E} \left[ \langle \phi, \chi_j \tilde{P}_\eta^l(I) \chi_j \phi \rangle \right] = \int_M d\eta k(\eta) \mathcal{P}(\eta) \quad (4.53)$$

berechnen. Wir unterscheiden dabei zwischen differenzierbaren Dichten  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$  und der Gleichverteilungs-Dichte  $f = \frac{1}{\omega_+} \chi_{[0, \omega_+]}$ .

#### 4.5.1 Differenzierbare Dichten

In diesem Unterabschnitt wird ein Resultat zur spektralen Mittelung für zufällige Kopplungskonstanten  $\omega_k$  mit differenzierbarer Dichte

$$f \in W^{1,1}(\mathbb{R}) \quad (4.54a)$$

bewiesen. Für den Faltungsvektor  $\alpha$  des Einzelplatz-Potentials mit verallgemeinerter Treppenform  $u$  gilt

$$\alpha_0 = 1 \text{ und } \alpha^* = \sum_{l \neq 0} |\alpha_l| < 1, \quad (4.54b)$$

vgl. Annahme 2.1.C und Bemerkung 2.1.3. Aus Fubinis Theorem folgt

$$\int_M d\eta k(\eta) \mathcal{P}(\eta) \leq \int_{\hat{M}} d\hat{\eta} \int_{M_{\hat{\eta}}} d\eta_j k(\eta) \mathcal{P}(\eta). \quad (4.55)$$

Die Anwendung der Technik der monotonen spektralen Mittelung (4.33) mit  $J = W = \chi_j$  und  $\zeta = \eta_j$  liefert:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{M}} d\hat{\eta} \int_{M_{\hat{\eta}}} d\eta_j k(\eta) \mathcal{P}(\eta) &\leq |I| \int_{\hat{M}} d\hat{\eta} \|k_{\hat{\eta}}(\cdot)\|_\infty \\ &\leq |I| \int_{\hat{M}} d\hat{\eta} \int_{M_{\hat{\eta}}} d\eta_j |k'_{\hat{\eta}}(\eta_j)| \\ &\leq |I| \int_M d\eta |k'_\eta(\eta_j)|, \end{aligned} \quad (4.56)$$

wobei in (4.56)  $\lim_{\eta_j \rightarrow -\infty} k_{\hat{\eta}}(\eta_j) = 0$  benutzt wurde, welches wegen der Invertierbarkeit von  $B$  gilt. Wir transformieren das Integral in die Variablen  $\omega_k$  zurück:

$$\int_M d\eta |k'_{\hat{\eta}}(\eta_j)| = \int_{[0, \omega_+]^{\Lambda^+}} d\omega |k'_{A\omega}[(A\omega)_j]|. \quad (4.57)$$

Die Ableitung der Dichte berechnet sich nach der Kettenregel:

$$k'_{A\omega}[(A\omega)_j] = \sum_{k \in \Lambda^+} f'(\omega_k) b_{k,j} \prod_{\substack{i \in \Lambda^+ \\ i \neq k}} f(\omega_i) \quad (4.58)$$



und für das Integral gilt

$$\int_{[0, \omega_+]^{|\Lambda^+|}} d\omega |k'_{A\omega}[(A\omega)_j]| \leq \|f'\|_{L^1} \sum_{k \in \Lambda^+} |b_{k,j}|. \quad (4.59)$$

Die Schranke (4.39) an die Spaltensummennorm von  $A^{-1} = B$  besagt

$$\sum_{k \in \Lambda^+} |b_{k,j}| \leq \|B\| \leq \frac{1}{1 - \alpha^*} \quad (4.60)$$

und impliziert

$$\int_M d\eta k(\eta) \mathcal{P}(\eta) \leq |I| \frac{\|f'\|_{L^1}}{1 - \alpha^*}. \quad (4.61)$$

Damit haben wir folgendes Resultat zur Spektralen Mittelung von Projektoren bewiesen, welche auch für Modelle mit indefiniten Potentialen gültig ist.

### Proposition 4.5.2

Sei  $H_\omega$  ein Legierungs-Modell mit Einzelplatz-Potential, welches die Annahme 2.1.C erfüllt. Dann gilt für  $\phi \in L^2(\Lambda_l)$ ,  $\|\phi\| = 1$

$$\mathbb{E} \left[ \langle \phi, \chi_j \tilde{P}_\eta^l(I) \chi_j \phi \rangle \right] \leq |I| \frac{\|f'\|_{L^1}}{1 - \alpha^*}. \quad (4.62)$$

In einer früheren Version [Ves00] des Beweises wurde für die Dichte  $f \in W^{2,2}$  angenommen. Die Ursache dafür war, daß bei Ungleichung (4.56) die spektrale Mittelung aus [CHM96] statt der aus [CH94] verwendet wurde. Die Verbesserung beruht auf einem Hinweis von T. Hupfer und S. Warzel.

### Bemerkung 4.5.3

Falls das Einzelplatz-Potential gegeben ist durch

$$u(x) := \sum_{l \in \Gamma} \alpha_l w(x - l)$$

$$w \geq \chi, \text{ supp } w \text{ kompakt}$$

gilt die Beziehung  $0 \leq \chi_j^2 = \chi_j \leq w$ . Die Ein-Parameter Familie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \eta_j &\mapsto \tilde{H}_\eta^l(\eta_j) = H_0^l + \sum_{k \in \Lambda^+} \eta_k w(\cdot - k) \\ &= \left[ H_0^l + \sum_{k \in \Lambda^+ \setminus j} \eta_k w(\cdot - k) \right] + \eta_j w(\cdot - j) \end{aligned}$$

und die spektrale Mittelung aus Abschnitt 4.3 ist anwendbar. Falls nur

$$\exists t > 0 : w \geq t\chi, \text{ supp } w \text{ kompakt.}$$

gilt, muß man wie in Bemerkung 2.1.2 eine Umskalierung vornehmen.

### 4.5.2 Grenzfälle

Wir legen dar, daß die Bedingungen (4.54) nicht die natürlichen Grenzen für die Anwendbarkeit der vorgestellten Methoden sind. Auch für allgemeinere Faltungsvektoren und Dichten kann man Resultate zur spektralen Mittelung erzielen. Die Ergebnisse sind Analoga zu Proposition 4.5.2.

Wir untersuchen Legierung-Potentiale mit Kopplungskonstanten, die gleichverteilt im Intervall  $[0, \omega_+]$  sind. In diesem Fall kann man die Sobolev-Abschätzung (4.56) nicht nutzen. Als Ersatz dafür muß der Integrationsbereich  $M$  erweitert werden. Dazu sind einige einfache, aber längliche Rechnungen erforderlich, weshalb wir dieses Modell eingehend in den Unterabschnitten 4.5.3 und 4.5.4 untersuchen.

Weniger aufwendig sind die Anpassungen, falls die Bedingungen an die Faltungsvektoren  $\alpha$  abgeschwächt werden. Wir betrachten Beispiele, die statt der Annahme  $\alpha^* < \alpha_0$  nur

$$\tilde{\alpha} := \sup_{k \neq 0} |\alpha_k| \leq \alpha_0$$

erfüllen. Der Beweis muß nur insofern angepaßt werden, als die Spaltensummennorm von  $B_\Lambda = A_\Lambda^{-1}$  nicht mehr die obere Schranke  $\frac{1}{1-\alpha^*}$  besitzt.

Sei  $e_1, \dots, e_d$  die Standard-Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^d$ .

#### Beispiel 4.5.4

Sei das Einzelplatz-Potential gegeben durch

$$u = \chi_0 - \chi_{e_1}, \text{ d.h. } \alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ -1 & \text{für } k = e_1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und die Dichte der Kopplungskonstanten sei aus  $W^{1,1}(\mathbb{R})$ . Ohne Einschränkung kann man  $d = 1$  annehmen, vgl. dazu Lemma 4.5.9. Die lineare Transformation  $A_\Lambda = \{a_{j,k}\}_{j,k \in \Lambda^+}$  besitzt die Einträge

$$a_{j,k} = \alpha_{j-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ -1 & \text{für } k = j - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und ihre Inverse  $B_\Lambda = \{b_{j,k}\}_{j,k \in \Lambda^+}$  die Koeffizienten

$$b_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{für } k \leq j \\ 0 & \text{für } k > j. \end{cases}$$

vgl. die Matrizen aus Seite 95. Daher gilt  $\|B_\Lambda\| \leq \#\Lambda^+$ . Die Abschätzung (4.60) ergibt:

$$\mathbb{E} \left[ \langle \phi, \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j \phi \rangle \right] \leq |I| \|f'\|_{L^1} \#\Lambda^+. \quad (4.63)$$

Falls die Seitenlänge  $l$  des Würfels  $\Lambda = \Lambda_l$  in  $2\mathbb{N}$  liegt, kann man die Schranke  $\#\Lambda^+$  durch  $l + 1$  ersetzen. Dies gilt unabhängig von der Raumdimension.

### Beispiel 4.5.5

Sei weiterhin die Dichte  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ , das betrachtete Einzelplatz-Potential hingegen

$$u = \chi_0 + \chi_{-e_1 - e_2} - \chi_{-e_1} - \chi_{-e_2}. \quad (4.64)$$

Wiederum kann man ohne Einschränkung annehmen, daß  $d = 2$  ist, da sich alles in der  $\text{Lin}\{e_1, e_2\}$ -Ebene abspielt. Auf  $\mathbb{Z}^2$  führen wir eine partielle Ordnung ein. Für  $k, n \in \mathbb{Z}^2$  sei

$$k \preceq n \iff \begin{cases} k_1 \leq n_1 \text{ und} \\ k_2 \leq n_2. \end{cases}$$

Als Variablentransformation wählen wir nun

$$B_\Lambda: \mathbb{R}^{\Lambda^+} \rightarrow \mathbb{R}^{\Lambda^+}, \quad \omega = A\eta, \quad \omega_k = \sum_{\substack{n \in \Lambda^+ \\ n \succeq k}} \eta_n. \quad (4.65)$$

Dann gilt für  $x \in \Lambda$

$$\sum_{\substack{n \in \Lambda^+ \\ n \preceq k}} u(x - k) = \chi_k(x)$$

und daher

$$V_\omega(x) = \sum_{k \in \Lambda^+} \omega_k u(x - k) = \sum_{k \in \Lambda^+} \eta_k \chi_k(x).$$

$B_\Lambda$  besitzt eine Dreiecks-Gestalt und ihre Diagonaleinträge sind sämtlich gleich Eins, also existiert  $A_\Lambda = B_\Lambda^{-1}$ . Da alle Koeffizienten aus  $\{0, 1\}$  sind, folgt für die Spaltensummennorm:

$$\|B\| \leq \#\Lambda^+ = (l + 1)^2, \quad \text{falls } \Lambda = \Lambda_l, l \in 2\mathbb{N}$$

und damit

$$\mathbb{E} \left[ \langle \phi, \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j \phi \rangle \right] \leq |I| \|f'\|_{L^1} (l + 1)^2. \quad (4.66)$$

Die Schranken (4.63), (4.66) an die spektrale Mittelung wachsen mit dem Volumen des Würfels  $\Lambda_l$  und sind insofern schwächer als diejenigen für die Modelle in Proposition 4.5.2.

### 4.5.3 Gleichverteilung

Wir betrachten eine feste Dichte  $f$  und ein festes Einzelplatz-Potential  $u$ . Wie in Abschnitt (1.2) bemerkt, ist dadurch das Legierungs-Potential schon eindeutig festgelegt. Es ist das einfachste Modell mit indefinitem Einzelplatz-Potential  $u$ :

$$u(x) := \chi_0 - \chi_{e_1}(x) \quad (4.67a)$$

$$f(\omega_0) := \frac{1}{\omega_+} \chi_{[0, \omega_+]}(\omega_0). \quad (4.67b)$$

D.h.  $u$  nimmt die Werte  $\pm 1$  auf zwei benachbarten Einheitswürfeln an und ist ansonsten gleich Null. Die Kopplungskonstanten sind gleichverteilt auf dem Intervall  $[0, \omega_+]$ .

In diesem Unterabschnitt erzielen wir für das Modell (4.67) eine Spektrale-Mittelungs-Abschätzung mit linearer Abhängigkeit von dem Volumen des Würfels  $\Lambda$ . Insofern ist das Resultat für dieses Modell schwächer als unter den Annahmen von Unterabschnitt 4.5.1. Allerdings zeigt es, daß die Bedingung

$$f \in W^{1,1}(\mathbb{R}).$$

nicht unumgänglich ist, um mit den Techniken dieser Arbeit eine Wegner-Abschätzung zu erzielen.

Als ersten Schritt zur Vorbereitung der spektralen Mittelung vereinfachen wir die Dichte des Integrals. Für  $\phi \in L^2(\Lambda_l)$ ,  $\|\phi\| = 1$ ,

$$\mathcal{P}(\eta) := \langle \phi, \chi_j P_{A_\Lambda^{-1}\eta}^l(I) \chi_j \phi \rangle = \langle \phi, \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j \phi \rangle$$

und  $t > 0$  gilt

$$\int_M d\eta k(\eta) \mathcal{P}(\eta) \leq \sup_{\eta \in M} [k(\eta)(1 + t\eta_j^2)] \int_M d\eta \frac{\mathcal{P}(\eta)}{1 + t\eta_j^2}. \quad (4.68)$$

Die Funktion  $k(\eta)(1 + t\eta_j^2)$  ist auf  $M$  beschränkt durch

$$|\det A^{-1}| \|f\|_\infty^{\Lambda^+} (1 + t\omega_+^2) = \left(\frac{1}{\omega_+}\right)^{\Lambda^+} (1 + t\omega_+^2). \quad (4.69)$$

Man beachte, daß  $\det A = 1$  ist.

#### Bemerkung 4.5.6

Das Supremum zu bilden ist natürlich eine gröbere Abschätzung als die Vorgehensweise in 4.5.1, welche die Dichte  $k$  innerhalb des Integrals beläßt und nur den Satz von Fubini verwendet. Die künstliche „Dichte“  $\frac{1}{1+t\eta_j^2}$  hängt bloß von einem Parameter  $\eta_j$  ab und wurde eingeführt, um (4.68) in eine ähnliche Form wie (4.30) zu bringen.

Allerdings kann man diese Ungleichung nicht direkt benutzen, da in dem Integrationsbereich  $M$  implizit eine Abhängigkeit der Variablen  $\{\eta_k | k \neq j\}$  von  $\eta_j$  gegeben ist. Daher kann man nicht *unmittelbar*

- zuerst über  $\eta_j$  mitteln,
- (4.30) anwenden und darauf
- die Integration über  $\{\eta_k | k \neq j\}$  ausführen.

#### Ansatz 4.5.7

Der Ansatz zur Lösung dieses Problems besteht darin,  $M$  durch eine geeignete größere Menge zu ersetzen, welche ein kartesisches Produkt des Integrationsbereichs über  $\eta_j$  und einer  $\eta_j$ -unabhängigen Menge ist. Diese Faktorisierung erlaubt es, die Integration über  $\eta_j$  als erstes auszuführen.

#### Bemerkung 4.5.8

Als einfachste Vergrößerung bietet sich

$$[-\omega_+, \omega_+]^{\Lambda^+} \supset A \left( [0, \omega_+]^{\Lambda^+} \right)$$

an. Die Inklusion gilt wegen

$$(A\omega)_k = \omega_k - \omega_{k-e_1} \in [0, \omega_+] - [0, \omega_+] = [-\omega_+, \omega_+].$$

Allerdings ist das Volumen

$$\left| [-\omega_+, \omega_+]^{\Lambda^+} \right| = 2^{\Lambda^+} \omega_+^{\Lambda^+}$$

um den exponentiellen Faktor  $2^{\Lambda^+}$  größer als

$$\left| A \left( [0, \omega_+]^{\Lambda^+} \right) \right| = \left| [0, \omega_+]^{\Lambda^+} \right| = \omega_+^{\Lambda^+}.$$

Eine Wegner-Schranke mit exponentiell wachsendem Volumen-Term ist jedoch für die Multiskalen-Analyse nutzlos. Man beachte, daß der Term  $\omega_+^{\Lambda^+}$  kein exponentielles Wachstum im Volumen verursacht, da er sich gegen den Term  $\left(\frac{1}{\omega_+}\right)^{\Lambda^+}$  in (4.69) wegekürzt.

Anhand der Bemerkung wird klar, daß die Vergrößerung des Integrationsbereichs sorgfältig gewählt werden muß. Dabei kommt uns zugute, daß  $A$  und daher auch  $M$  eine spezielle Struktur aufweisen. Der lineare Operator  $A$  ist eine direkte Summe und die Menge  $M$  ein Produkt.

#### Lemma 4.5.9

Bezeichne  $\Lambda(n) = \Lambda_l(n) \subset \mathbb{R}^n$  den  $n$ -dimensionalen Würfel der Kantenlänge  $l \in 2\mathbb{N}$  mit Mittelpunkt  $0$  und sei  $\tilde{\Lambda}(n) = \Lambda(n) \cap \mathbb{Z}^n$ . Dann gilt

$$A = \bigoplus_{\kappa \in \tilde{\Lambda}(d-1)} A^\kappa, \quad A^\kappa: \mathbb{R}^{l+1} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}.$$

Dementsprechend gilt für die Bildmenge  $M$

$$M = A\left([0, \omega_+]^{\Lambda^+}\right) = \bigtimes_{\kappa \in \tilde{\Lambda}(d-1)} A^\kappa\left([0, \omega_+]^{l+1}\right). \quad (4.70)$$

**Beweis und Bemerkung:** Im vorliegenden Fall ist  $\Gamma = \{0, e_1\} \subset \mathbb{Z}^d$  der „Träger“ des Einzelplatz-Potentials. Für die relevante Teilmenge der Indizes in  $\mathbb{Z}^d$  gilt

$$\begin{aligned} \Lambda^+ &= \tilde{\Lambda} - \Gamma = \tilde{\Lambda} \cup (\tilde{\Lambda} - e_1) \\ &= \left\{ k \in \mathbb{Z}^d \mid k_1 \in \left\{ -\frac{l}{2} - 1, \dots, \frac{l}{2} - 1 \right\}, k_i \in \left\{ -\frac{l}{2}, \dots, \frac{l}{2} - 1 \right\} \forall i = 2, \dots, d \right\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Wir setzen

$$\Lambda^\kappa := \left\{ k \in \mathbb{Z}^d \mid k = (k_1, \kappa), k_1 \in \left\{ -\frac{l}{2} - 1, \dots, \frac{l}{2} \right\} \right\}$$

und schreiben die Menge  $\Lambda^+$  als Produkt

$$\begin{aligned} \Lambda^+ &= \bigcup_{\kappa \in \tilde{\Lambda}(d-1)} \Lambda^\kappa \\ &= \bigcup_{\kappa \in \tilde{\Lambda}(d-1)} \{\Lambda^+(1) \times \kappa\} \\ &= \Lambda^+(1) \times \tilde{\Lambda}(d-1), \end{aligned} \quad (4.72)$$

wobei  $\Lambda^+(1) = \Lambda_l^+(d=1) = \{-\frac{l}{2} - 1, \dots, \frac{l}{2} - 1\}$ . Die Matrix  $A$  besitzt die Einträge

$$a_{k,n} = \alpha_{k-n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = k, \\ -1 & \text{falls } n = k - e_1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.73)$$

Wegen seiner einfachen Struktur zerfällt der Operator  $A$  in eine direkte Summe entsprechend der Faktorisierung (4.72) der Indexmenge.

$$A = \bigoplus_{\kappa \in \tilde{\Lambda}(d-1)} A^\kappa, \quad A^\kappa: \mathbb{R}^{l+1} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}. \quad (4.74)$$

Die Gleichung (4.74) rechnet man leicht nach. Für  $k = (k_1, \kappa)$ ,  $n = (n_1, \nu)$  und  $\omega \in \mathbb{R}^{\Lambda^+}$  gilt

$$\begin{aligned}
(A_\Lambda \omega)_k &= \sum_{n \in \Lambda^+} \alpha_{k-n} \omega_n \\
&= \sum_{n \in \Lambda^+} \delta_{\kappa-\nu} [\delta_{k_1, n_1} - \delta_{k_1, n_1+1}] \omega_n \\
&= \sum_{n \in \Lambda^\kappa} [\delta_{k_1, n_1} - \delta_{k_1, n_1+1}] \omega_n \\
&= \begin{cases} \omega_k - \omega_{k-e_1} & \text{falls } k \in \tilde{\Lambda}, \\ \omega_k & \text{falls } k \in \Lambda^+ \setminus \tilde{\Lambda}, \text{ d.h. im Fall } k_1 = -\frac{l}{2} - 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dementsprechend läßt sich der Integrationsbereich  $M$  als kartesisches Produkt schreiben.

$$\begin{aligned}
A \left( [0, \omega_+]^{\Lambda^+} \right) &= \left( \bigoplus_{\kappa \in \tilde{\Lambda}(d-1)} A^\kappa \right) \left( [0, \omega_+]^{l+1} \right)^{\tilde{\Lambda}(d-1)} \\
&= \bigtimes_{\kappa \in \tilde{\Lambda}(d-1)} \left[ A^\kappa \left( [0, \omega_+]^{l+1} \right) \right]
\end{aligned}$$

**q.e.d.**

Der entscheidende Summand in (4.74) ist  $A^\kappa$  mit  $\kappa = \kappa(j) := (j_2, \dots, j_d)$ . Wir bezeichnen ihn mit  $\mathcal{A}$  und schreiben ihn als Matrix.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= A^{\kappa(j)}: \mathbb{R}^{l+1} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1} \\
\mathcal{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(l+1) \times (l+1)}. \quad (4.75)
\end{aligned}$$

Die Einträge von  $\mathcal{A} = \{a_{k,n} | k, n \in \Lambda^+(1)\}$  sind  $a_{k,n} = 1$ , falls  $n = k$ ,  $a_{k,n} = -1$ , falls  $n = k - 1$  und  $a_{k,n} = 0$  sonst, wie man (4.73) entnehmen kann. Die Inverse

$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B}$  ist

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(l+1) \times (l+1)}$$

mit den Einträgen  $b_{k,n} = 1$ , falls  $k \geq n$  und  $b_{k,n} = 0$ , falls  $k < n$ .

**Bemerkung 4.5.10**

Wir haben den linearen Operator  $A$  nie als Matrix hingeschrieben, denn wir haben keine Reihenfolge auf der Indexmenge  $\mathbb{Z}^d$  eingeführt, d.h. keine injektive Abbildung  $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ , bzw.  $\Lambda^+ \rightarrow \mathbb{N}$  im Fall der trunkierten Matrizen. Eine explizite Darstellung von  $A$  als Matrix hätte die interne Struktur der Transformation, wie sie in (4.74) zum Vorschein kommt, nur verschleiert.

Wir haben die Vorarbeit geleistet, aus dem Integrationsbereich den Faktor

$$\mathcal{M} := \mathcal{A} \left( [0, \omega_+]^{l+1} \right) \quad (4.76)$$

herauszutrennen. Die Matrix  $\mathcal{A}$  besitzt keine weiteren Unterräume, die sie reduzieren, wie aus (4.75) zu erkennen ist. Wir finden nun eine Obermenge  $\mathcal{M}^+$  von  $\mathcal{M}$ , welche die in Ansatz 4.5.7 beschriebenen Bedingungen erfüllt.

Der zu Anfang dieses Abschnitts festgelegte Index  $j \in \tilde{\Lambda}$  läßt sich schreiben als  $j = (j_1, \kappa(j))$  mit  $j_1 \in \Lambda^+(1) = \{-\frac{l}{2} - 1, \dots, \frac{l}{2} - 1\}$ . Da  $j$  fest ist, impliziert  $\eta \in M$

$$\{\eta_{(m, \kappa(j))}\}_{m \in \Lambda^+(1)} \in \mathcal{M}.$$

Wir schreiben der Einfachheit halber  $\theta_m = \eta_{(m, \kappa(j))} \forall m \in \Lambda^+(1)$ , wobei wir die Komponente  $\theta_m = \theta_{j_1} = \eta_j =: \theta_*$  durch die Notation  $\theta = (\theta_*, \hat{\theta})$  auszeichnen. Wir numerieren die  $l+1$  Indizes von  $\theta$  um:  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_l)$  und betrachten zuerst den Fall  $\theta_* = \theta_0$ . Das abzuschätzende Integral liest sich in der neuen Notation

$$\int_{\mathcal{M}} d\theta \frac{\mathcal{P}(\theta)}{1 + t\theta_0^2} = \int_0^{\omega_+} d\theta_0 \int_{-\theta_0}^{\omega_+ - \theta_0} d\theta_1 \dots \int_{-\sum_{k=0}^{l-1} \theta_k}^{\omega_+ - \sum_{k=0}^{l-1} \theta_k} d\theta_l \frac{\mathcal{P}(\theta)}{1 + t\theta_0^2} \quad (4.77)$$

wobei  $\mathcal{P}(\theta) := \mathcal{P}(\eta)$  die offensichtliche Bedeutung hat. Die expliziten Integralgrenzen in (4.77) zeigen, daß  $\theta_0$  die Integrationsbereich der Komponenten von  $\theta$  mit höherem Index beeinflusst. Die Koeffizienten der Matrix  $\mathcal{A}$  werden analog



zu denen von  $\theta$  umnummeriert

$$\mathcal{A} = \{a_{k,n}\}_{k,n=0}^l, \quad (4.78)$$

$$a_{k,n} = 1 \text{ für } n = k, \quad a_{k,n} = -1 \text{ für } n = k - 1 \text{ und } a_{k,n} = 0 \text{ sonst.} \quad (4.79)$$

Sei  $\hat{\mathcal{A}}$  die Blockmatrix  $\{a_{k,n}\}_{k,n=1}^l$ , d.h.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & & \\ 0 & & \hat{\mathcal{A}} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht, daß die Block-Struktur sich auf die Inverse überträgt

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & \hat{\mathcal{B}} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Sei  $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^l$  und  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  die Inklusionen

$$\begin{aligned} \mathcal{J}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{l+1}, & \mathcal{I}: \mathbb{R}^l &\rightarrow \mathbb{R}^{l+1} \\ \mathcal{J}(\theta_0) &= \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l+1}, & \mathcal{I} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_l \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l+1}, \end{aligned}$$

sowie

$$S := \bigcup_{F \in [0, \omega_+]} \{\hat{\theta} | \mathcal{B} \hat{\theta} + F e \in [0, \omega_+]^l\} \subset \mathbb{R}^l. \quad (4.80)$$

Mit der bereitgestellten Notation können wir die geeignete Obermenge  $\mathcal{M}^+$  der Integrationsdomäne  $\mathcal{M}$  angeben.

**Lemma 4.5.11**

1.  $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}(S) \oplus \mathcal{J}([0, \omega_+]) = S \times [0, \omega_+]$
2.  $\int_{\mathcal{M}} d\theta \frac{\mathcal{P}(\theta)}{1 + t\theta_0^2} \leq \int_S d\hat{\theta} \int_{[0, \omega_+]} d\theta_0 \frac{\mathcal{P}(\theta)}{1 + t\theta_0^2}$
3. Das Volumen des verallgemeinerten Parallelepipedes  $S \subset \mathbb{R}^l$  beträgt  $l \omega_+^l$ .

**Beweis:**

zu 1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \mathcal{A} \left( [0, \omega_+] \times [0, \omega_+]^l \right) \\
&= \left\{ \theta \in \mathbb{R}^{l+1} \mid \theta_0 \in [0, \omega_+], \hat{\mathcal{B}} \hat{\theta} \in [0, \omega_+]^l - \theta_0 e \right\} \\
&= \bigcup_{\theta_0 \in [0, \omega_+]} \left\{ \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l+1} \mid \hat{\mathcal{B}} \hat{\theta} \in [0, \omega_+]^l - \theta_0 e \right\} \\
&\subset \bigcup_{F \in [0, \omega_+]} \left\{ \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l+1} \mid \theta_0 \in [0, \omega_+], \hat{\mathcal{B}} \hat{\theta} \in [0, \omega_+]^l - F e \right\} \\
&= \mathcal{I}(S) \oplus \mathcal{J}([0, \omega_+])
\end{aligned}$$

zu 2. Da der Integrand

$$\frac{\mathcal{P}(\theta)}{1 + t\theta_0^2} = \frac{1}{1 + t\eta_{(0, \kappa(j))}^2} \langle \phi, P_{A^{-1}\eta}^l(I)\phi \rangle$$

nicht-negativ ist, folgt die Behauptung aus 1.

zu 3. Wir schreiben  $S$  als Bildmenge unter der Abbildung  $\hat{\mathcal{A}}$ .

$$\begin{aligned}
S &= \bigcup_{F \in [0, \omega_+]} \{ \hat{\theta} \mid \hat{\mathcal{B}} \hat{\theta} + F e \in [0, \omega_+]^l \} \\
&= \{ \hat{\theta} \mid \hat{\mathcal{B}} \hat{\theta} + F e \in [0, \omega_+]^l \text{ für ein } F \in [0, \omega_+] \} \\
&= \{ \hat{\theta} \mid \hat{\mathcal{B}} \hat{\theta} = y - F e \text{ für ein } y \in [0, \omega_+]^l, F \in [0, \omega_+] \} \\
&= \{ \hat{\theta} \mid \hat{\theta} = \hat{\mathcal{A}}(y - F e) \text{ für ein } y \in [0, \omega_+]^l, F \in [0, \omega_+] \} \\
&= \hat{\mathcal{A}} \{ x \mid x = y - F e \text{ für ein } y \in [0, \omega_+]^l, F \in [0, \omega_+] \} \tag{4.81}
\end{aligned}$$

Wegen  $\det \hat{\mathcal{A}} = 1$  ist das Volumen von (4.81) gleich dem von

$$\{ x \mid x = y - F e \text{ für ein } y \in [0, \omega_+]^l, F \in [0, \omega_+] \} \tag{4.82}$$

In Unterabschnitt 4.5.4 wird nachgerechnet, daß das Volumen von (4.82) gleich  $l\omega_+^l$  ist.

**q.e.d.**

Für allgemeines  $\theta_* = \theta_m$  sind nur die Integrationsbereiche der Variablen  $\theta_{m+1}, \dots, \theta_l$  von  $\theta_*$  abhängig. Daher reicht es in der Definition von  $S$  die kleinere  $(l-m) \times (l-m)$ -Matrix

$$\hat{A} = \{a_{k,n}\}_{k,n=m+1}^l$$

zu verwenden. Lemma 4.5.11 behält in diesem Fall seine Gültigkeit, nur ist nun  $l\omega_+^l$  eine obere Schranke an das Volumen von  $S$ .

Nun können wir das Resultat zur spektralen Mittelung der Projektoren formulieren.

**Lemma 4.5.12**

Sei das zufällige Potential des Legierungs-Modells  $H_\omega$  durch die Gleichungen (4.67) gegeben. Dann gilt für normierte Vektoren  $\phi \in L^2(\Lambda_l)$

$$\mathbb{E} \langle \phi, \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j \phi \rangle \leq \frac{l}{\omega_+} |I| \quad (4.83)$$

**Beweis:**

Aus Lemma 4.5.11 und (4.31) folgt:

$$\int_S d\hat{\theta} \int_{[0, \omega_+]} d\theta_* \frac{\mathcal{P}(\theta)}{1+t\theta_*^2} \leq \int_S d\hat{\theta} |I| \leq l\omega_+^l |I|. \quad (4.84)$$

In Lemma 4.5.9 haben wir nachgerechnet, daß der Integrationsbereich  $M$  eine Produktstruktur aufweist.

$$\int_M d\eta \frac{\mathcal{P}(\eta)}{1+t\eta_j^2} = \int d\eta \frac{\mathcal{P}(\eta)}{1+t\eta_j^2} \times \left( A^\kappa [0, \omega_+]^{l+1} \right)_{\kappa \in \tilde{\Lambda}(d-1)} \quad (4.85)$$

In einer geeignete Basis besitzt jeder der Abbildungen  $A^\kappa$  die Matrixdarstellung (4.75). Insbesondere ist  $\det A^\kappa = 1$  für alle  $\kappa \in \tilde{\Lambda}(d-1)$  und damit

$$\int_{A^\kappa([0, \omega_+]^{l+1})} d\eta_{(-\frac{l}{2}-1, \kappa)} \dots d\eta_{(\frac{l}{2}, \kappa)} = \omega_+^{l+1}.$$

Die Gleichungen (4.84) und (4.85) liefern die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_M d\eta \frac{\mathcal{P}(\eta)}{1+t\eta_j^2} &\leq \left[ \prod_{\kappa \in \tilde{\Lambda}(d-1), \kappa \neq \kappa(j)} \omega_+^{l+1} \right] l\omega_+^l |I| \\ &= \omega_+^{\Lambda^+} \frac{l}{\omega_+} |I|, \end{aligned}$$

die wir mit (4.68) und (4.69) kombinieren:

$$\int_M d\eta k(\eta) \mathcal{P}(\eta) \leq (1 + t\eta_j^2) \frac{l}{\omega_+} |I|, \quad \forall t > 0.$$

Der Grenzübergang  $t \rightarrow 0$  ergibt:

$$\int_M d\eta k(\eta) \mathcal{P}(\eta) \leq \frac{l}{\omega_+} |I|.$$

Das Integral transformiert man in die  $\omega$ -Koordinaten zurück.

$$\frac{l}{\omega_+} |I| \geq \int_M d\eta k(\eta) \mathcal{P}(\eta) = \mathbb{E} \langle \phi, \chi_j P_\omega^l(I) \chi_j \phi \rangle.$$

**q.e.d.**

#### 4.5.4 Berechnung des Volumens eines verallgemeinerten Parallelepeds

In diesem Abschnitt berechnen wir das Volumen der Menge (4.82). Für die Dimension des Raumes schreiben wir hier  $n$  statt  $l$ . Seien

$$\begin{aligned} e &:= (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n \\ Q &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [0, 1] \forall i = 1, \dots, n\} \\ V &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = y + g e, g \in [0, 1], y \in Q\} \\ K_i &:= \{x \in Q \mid x_i = 1\}, \forall i = 1, \dots, n \\ V_i &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = y + g e, g \in [0, 1], y \in K_i\}. \end{aligned}$$

Die Menge  $Q$  ist ein Würfel,  $V$  ist ein verallgemeinertes Parallelepiped,  $K_i$  sind die Begrenzungsflächen von  $Q$  und  $V_i$  die Teile von  $V$ , welche außerhalb von  $Q$  liegen.

##### Lemma 4.5.13

1.  $V = Q \cup \bigcup_{i=1}^n V_i$
2.  $|V| = |Q| + \sum_{i=1}^n |V_i|$ . Dabei bezeichnet  $|\cdot|$  das Lebesguemaß einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ .

##### Beweis:

Zu (1). Wir zeigen zuerst : für jedes  $x \in V \setminus Q$  existiert ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $x \in V_i$ .

Nach der Definition existiert ein  $y \in Q$  und ein  $g \in ]0, 1]$  mit  $x = y + ge$ . Dieses  $y$  muß nicht eindeutig sein, wir legen es für den Rest der Diskussion fest. Setze  $g^* := \inf\{g \geq 0 \mid y + ge \notin Q\}$ .

Behauptung:  $x^* := y + g^*e \in \partial Q$ .

Beweis: Sei  $\epsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Wir zeigen: es existieren  $a, b \in B_\epsilon(x^*)$  mit  $a \notin Q, b \in Q$ . Setze  $a := x^* + \frac{\epsilon}{2n}e$ . Dann gilt  $\|x^* - a\| = \frac{\epsilon}{2n}\sqrt{n} < \epsilon$  und  $a = y + g_a e$ , wobei  $g_a = g^* + \frac{\epsilon}{2n} > g^*$  ist. Falls  $a \in Q$  wäre, wären für  $g^* \in [0, g_a]$  alle  $y + g^*e \in Q$  wegen der Konvexität von  $Q$ . Dies ergibt einen Widerspruch zur Definition von  $g^*$ .

Ebenso definieren wir  $b := x^* - \frac{\epsilon}{2n}e$ . Es gilt  $a \in B_\epsilon(x^*)$  wie oben und  $b = y + g_b e < g^*$  ist. Also ist  $b \in Q$  nach Definition von  $g^*$ .

Behauptung:  $x^* \in \bigcup_{i=1}^n K_i$ .

Beweis: Sei  $x^* \in \partial Q$  in keinem  $K_i$  enthalten. Dann gibt es ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $x_i^* = 0$  und  $x_j^* < 1$  für alle  $j = 1, \dots, n$ . Setze  $t_0 = \min\{1 - x_j^* \mid j = 1, \dots, n\}$ . Dann ist  $x^t := x^* + te \in Q$  für alle  $t \in [0, t_0[$  da  $x_j^t = x_j^* + t < 1$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Also kann es keine Nullfolge  $g_k \searrow 0$  geben, so daß  $x^* + g_k e \notin Q$ . Dies widerspricht der Definition von  $g^*$  bzw.  $x^*$ .<sup>4</sup>

Also haben wir gezeigt: Zu jedem  $x = y + ge \in V \setminus Q$  existiert ein  $i \in \{1, \dots, d\}$  und  $x^* = y + g^*e \in K_i$  mit  $y \in Q, g, g^* \geq 0$ . Man kann auch schreiben  $x = y + ge = x^* + (g - g^*)e$ . Für den Koeffizienten gilt  $g - g^* \leq g \leq 1$  und  $g - g^* > 0$  wie wir zeigen:

$Q$  ist konvex und abgeschlossen, damit die Menge  $\{\tilde{g} \mid y + \tilde{g}e \in Q\}$  auch, also ist sie ein abgeschlossenes Intervall. Also gilt nach der Definition von  $g^*$   $\{\tilde{g} \mid y + \tilde{g}e \in Q\} = [A, g^*] \not\ni g^*$  mit  $A \leq 0$ . Da  $[A, g^*] \ni g \geq 0$  folgt  $g > g^*$ .

Damit ist gezeigt:  $x \in V_i$ .

Nun zum Beweis der umgekehrten Inklusion:  $x \in Q$  impliziert  $x \in V$ . Wegen

$$\begin{aligned} V_i &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid x = y + ge, y \in K_i, g \in [0, 1]\} \\ &\subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid x = y + ge, y \in Q, g \in [0, 1]\} = V \end{aligned}$$

ergibt sich die Inklusion.

Nun zur Aussage (2). Der Schnitt  $Q \cap V_i = K_i$  ist  $n - 1$ -dimensional und hat demnach  $\mathbb{R}^n$ -Lebesguemaß gleich 0. Die Normalenvektoren  $\nu_i, \nu_j$  von  $K_i$  und  $K_j$  für  $i \neq j$  stehen senkrecht aufeinander. Sie lassen sich durch  $n - 2$  Vektoren zu einer Orthonormalbasis ergänzen. Die Schnittmenge  $K_i \cap K_j$  steht auf beiden Normalenvektoren  $\nu_i, \nu_j$  orthogonal, und ist demnach höchstens  $n - 2$

<sup>4</sup>Man schreibt  $x^* + g_k e = y + (g^* + g_k)e$ . Es gilt  $g_k \searrow 0 \iff \gamma_k := g^* + g_k \searrow g^*$ . Also gilt  $\exists \gamma_k \searrow g^*$  mit  $y + \gamma_k e \notin Q$  im Widerspruch zur Definition von  $g^*$ .

dimensional. Nun gilt für die Schnittmenge von  $V_i$  und  $V_j$  :

$$\begin{aligned} V_i \cap V_j &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = y + ge, g \in [0, 1], y \in K_i\} \\ &\quad \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = y + ge, g \in [0, 1], y \in K_j\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = y + ge, g \in [0, 1], y \in K_i \cap K_j\} \end{aligned}$$

Dieses Gebilde ist höchstens  $n - 1$  dimensional, da  $ge, g \in [0, 1]$  nur eine zusätzliche Dimension beitragen kann.

Wir haben gezeigt, daß die Vereinigung in (1) disjunkt ist, bis auch Nullmengen. Also gilt die additive Zerlegung des Lebesguemaßes in (2).

**q.e.d.**

Das Volumen  $|Q|$  beträgt 1. Im nachfolgenden Lemma berechnen wir die Volumina der  $V_i$ .

**Lemma 4.5.14**

$$|V_i| = |Q| = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

**Beweis:**

Sei  $A$  die affine Abbildung

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto A(x) = M(x - e_i),$$

wobei  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Matrix mit den Einträgen

$$M_{j,k} = \begin{cases} 1 & \forall j = k = 1, \dots, n \\ -1 & \forall k = i, j = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.86)$$

und  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  der  $i$ -te Einheitsvektor ist. Wir berechnen die Determinante der Matrix  $M$  durch Entwickeln nach der ersten Zeile:  $\det(M) = 1 \cdot \det(\text{Id}_{n-1}) = 1$ , wobei  $\text{Id}_{n-1}$  die  $(n - 1) \times (n - 1)$  Einheitsmatrix ist. Da die Translation keinen Einfluß auf das Volumen hat, ergibt sich, daß die Abbildung  $A$  das Volumen invariant läßt. Nun zeigen wir noch  $A(V_i) = Q$  und wissen damit, daß das Volumen von  $V_i$  mit dem von  $Q$  übereinstimmt und daher gleich 1 ist.

Sei  $x \in V_i$ , d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + g \\ \vdots \\ 1 + g \\ \vdots \\ y_n + g \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor wird durch  $A$  abgebildet auf

$$M \begin{pmatrix} y_1 + g \\ \vdots \\ \vdots \\ g \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n + g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + g \\ \vdots \\ \vdots \\ g \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n + g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ g \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} A(V_i) &= \{A(x) \mid x \in V_i\} \\ &= \{A(x) \mid x = y + ge, y \in K_i, g \in [0, 1]\} \\ &= \left\{ A(x) \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + g \\ \vdots \\ 1 + g \\ \vdots \\ y_n + g \end{pmatrix}, y \in K_i, g \in [0, 1] \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ g \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mid g, y_j \in [0, 1], j \neq i \right\} \end{aligned}$$

**q.e.d.**

## 4.6 Stetigkeit der integrierten Zustandsdichte

Wir fassen die Argumente der Abschnitte 4.2 bis 4.5 zusammen und beweisen die Lipschitz-Stetigkeit der gemittelten integrierten Zustandsdichte auf endlichen Würfeln. In den meisten Fällen ist die Lipschitz-Konstante unabhängig vom Würfelvolumen, so daß die integrierte Zustandsdichte im thermodynamischen Limes ebenfalls stetig ist.

Wir erinnern noch einmal daran, daß die bisher in diesem Kapitel 4 erzielten Abschätzungen ebenso gelten, falls  $H_\omega^l$  statt mit Dirichlet Randbedingungen mit periodischen oder mit Neumann-Randbedingungen versehen ist.

### 4.6.1 Legierungs-Modell

Sei zuerst  $H_\omega$  ein Legierungs-Modell mit den Eigenschaften (4.54). Aus der Abschätzung der quadratischen Form in Proposition 4.5.2 folgt für die entsprechende Operatornorm:

$$\left\| \mathbb{E}(\chi_j P_\omega^l(I) \chi_j) \right\| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1 - \alpha^*} |I|.$$

Diese Schranke ist von  $j$  unabhängig und impliziert

$$\sum_{j \in \tilde{\Lambda}_l} \left\| \mathbb{E}(\chi_j P_\omega^l(I) \chi_j) \right\| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1 - \alpha^*} |I| \#\tilde{\Lambda}_l.$$

Man beachte, daß für  $l \in 2\mathbb{N}$  gilt

$$\#\tilde{\Lambda}_l = |\Lambda_l| = l^d.$$

Also erhalten wir mit den Abschätzungen aus Abschnitt 4.2

$$\mathbb{E} \left( \text{Tr} P_\omega^l(\cdot] E_1, E_2[ \cdot) \right) \leq e^{E_2} C_{\text{Tr}} \frac{\|f\|_\infty}{1 - \alpha^*} l^d |E_2 - E_1|.$$

Durch eine Grenzwert-Betrachtung sieht man, daß die Ungleichung auch gilt, falls einer oder beide Randpunkte zu dem Intervall  $I = ]E_1, E_2[$  hinzugenommen werden.

Nun wenden wir uns dem Sonderfall zu, bei dem das Legierungs-Potential durch die Gleichungen (4.67) gegeben ist. In der obigen Argumentation ersetzen wir Proposition 4.5.2 durch Lemma 4.5.12 und erhalten:

$$\mathbb{E} \left( \text{Tr} P_\omega^l(\cdot] E_1, E_2[ \cdot) \right) \leq e^{E_2} C_{\text{Tr}} \|f\|_\infty l^{d+1} |E_2 - E_1|.$$

Damit ist in beiden Fällen gezeigt, daß die gemittelte integrierte Zustandsdichte auf endlichen Würfeln Lipschitz-stetig ist.

#### Lemma 4.6.1

1. Sei  $H_\omega$  ein Legierungs-Modell, das die Eigenschaften in 2.1.C besitzt. Dann gilt für  $l \in 2\mathbb{N}$ :

$$\mathbb{E} \left( N_\omega^l(E_2) - N_\omega^l(E_1) \right) \leq e^{E_2} C_{\text{Tr}} \frac{\|f\|_\infty}{1 - \alpha^*} |E_2 - E_1|. \quad (4.87)$$

2. Sei  $H_\omega$  ein Legierungs-Modell mit zufälligem Potential (4.67). Dann gilt für  $l \in 2\mathbb{N}$ :

$$\mathbb{E} \left( N_\omega^l(E_2) - N_\omega^l(E_1) \right) \leq e^{E_2} C_{\text{Tr}} \|f\|_\infty l |E_2 - E_1|. \quad (4.88)$$



**Bemerkung 4.6.2**

Für  $l \notin 2\mathbb{N}$  steht auf der rechten Seite von (4.87) bzw. (4.88) der Vorfaktor

$$\frac{\#\tilde{\Lambda}_l}{|\Lambda_l|}.$$

Dieser ist kleiner als  $\frac{(l+1)^d}{l^d}$  und konvergiert für  $l \rightarrow \infty$  gegen 1.

**4.6.2 Anderson-Modell**

Sei nun  $h_\omega = h + v_\omega$  das diskrete Anderson-Modell wie in 2.1.F beschrieben. Für die Abschätzung der Spur des zugehörigen Spektralprojektors ist es nicht nötig — wie in Abschnitt 4.2 — die Exponentialfunktion von  $h_\omega$  künstlich einzuführen. Man beachte, daß im diskreten Fall  $\chi_j = \delta_j$  ist, da  $[0, 1]^d \cap \mathbb{Z}^d = \{0\}$  ist. Die Auswertung der Spur in der Standardbasis ergibt

$$\mathbb{E} \left\{ \text{Tr} \left[ P_\omega^l(I) \right] \right\} = \mathbb{E} \left\{ \sum_{j \in \tilde{\Lambda}_l} \langle \delta_j, P_\omega^l(I) \delta_j \rangle \right\}$$

Wie in den Abschnitten 4.3 bis 4.5 schätzt man

$$\mathbb{E} \left\{ \langle \delta_j, P_\omega^l(I) \delta_j \rangle \right\} \leq \frac{\|f\|_\infty}{1 - \alpha^*} |I|$$

ab, falls  $v_\omega$  die Bedingungen (4.54) erfüllt bzw.

$$\mathbb{E} \left\{ \langle \delta_j, P_\omega^l(I) \delta_j \rangle \right\} \leq \|f\|_\infty l |I|$$

für das Modell (4.67). Das Resultat wird zusammengefaßt in

**Lemma 4.6.3**

1. Sei  $h_\omega$  ein Anderson-Modell, welches die Eigenschaften in 2.1.C erfüllt. Dann gilt für  $l \in 2\mathbb{N}$ :

$$\mathbb{E} \left( N_\omega^l(E_2) - N_\omega^l(E_1) \right) \leq \frac{\|f\|_\infty}{1 - \alpha^*} |E_2 - E_1|. \quad (4.89)$$

2. Sei  $h_\omega$  ein Anderson-Modell mit zufälligem Potential (4.67). Dann gilt für  $l \in 2\mathbb{N}$ :

$$\mathbb{E} \left( N_\omega^l(E_2) - N_\omega^l(E_1) \right) \leq \|f\|_\infty l |E_2 - E_1|. \quad (4.90)$$

**4.6.3 Korrelierte Kopplungskonstanten**

Man kann die erzielten Resultate auch als Aussagen über den Schrödinger-Operator  $\tilde{H}_\eta$  auffassen. D.h. man betrachtet das Legierungs-Potential

$$V_\eta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \eta_k \chi_k,$$

wobei die Kopplungskonstanten zwar identisch verteilt, aber nicht unabhängig sind. Die gemeinsame Dichte  $k(\eta)$  muß eine besondere Struktur besitzen. Für jeden endlichen Würfel  $\Lambda$  existiere eine invertierbare lineare Abbildung  $A_\Lambda: \Omega \rightarrow \Omega$  und ein  $q < \infty$ , mit den Eigenschaften

$$0 < |\det A_\Lambda|, |\det A_\Lambda^{-1}|, \|A_\Lambda^{-1}\| \leq |\Lambda|^q$$

sowie ein  $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ , so daß

$$k(\eta) = \prod_k f((A_\Lambda^{-1}\eta)_k)$$

ist. Dann gilt die Abschätzung

$$\mathbb{E} \left( N_\omega^l(E_2) - N_\omega^l(E_1) \right) \leq \text{const}(|\Lambda|) |E_2 - E_1|,$$

wobei die Konstante  $\text{const}(|\Lambda|)$  höchstens polynomial in  $|\Lambda|$  anwächst. Diese Wegner-Abschätzung ist ausreichend, um sie für die Multiskalen-Analyse verwenden zu können.

#### Bemerkung 4.6.4

Bisherige Resultate [vDK91, KSS98a] über korrelierte Anderson-artige Potentiale betreffen vor allem den Fall positiver langreichweitiger Korrelation. Unter diesen Voraussetzungen muß man die Multiskalen-Analyse abändern, damit sie den exponentiellen Abfall der Resolvente liefert. Insbesondere ist eine schärfere Wegner-Abschätzung vonnöten, die uniform in bestimmten Komponenten des Zufalls ist.

Legierungs-Potentiale mit korrelierten Kopplungskonstanten werden auch in [CHM98] und [HMLW00] betrachtet.

#### 4.6.4 Thermodynamischer Limes

Für einige betrachtete Modelle ist die Lipschitz-Konstante der gemittelten integrierten Zustandsdichte auf endlichen Würfeln unabhängig vom Volumen. In solchen Fällen bleibt die Schranke im thermodynamischen Limes

$$\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d$$

gültig:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( N_\omega^l(E_2) - N_\omega^l(E_1) \right) \leq \begin{cases} e^{E_2} C_{\text{Tr}} \frac{\|f\|_\infty}{1-\alpha^*} |E_2 - E_1| & \text{falls (4.87) gilt} \\ \frac{\|f\|_\infty}{1-\alpha^*} |E_2 - E_1| & \text{falls (4.89) gilt.} \end{cases}$$

Aus [KM82a] weiß man

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( N_\omega^l(E_2) - N_\omega^l(E_1) \right) = N(E_2) - N(E_1).$$

Damit folgt

**Lemma 4.6.5**

Sei  $H_\omega$  bzw.  $h_\omega$  ein Legierungs-Modell bzw. ein Anderson-Modell, das die Bedingung 2.1.C erfüllt. Dann ist

$$E \mapsto N(E)$$

eine Lipschitz-stetige Funktion. Insbesondere existiert die Ableitung  $\frac{dN}{dE}$  fast überall und ist lokal beschränkt:

$$\sup_{E \in [E_1, E_2]} \frac{dN}{dE}(E) \leq \begin{cases} e^{E_2} C_{\text{Tr}} \frac{\|f\|_\infty}{1-\alpha^*} & \text{im Falle des Legierungs-Modells} \\ \frac{\|f\|_\infty}{1-\alpha^*} & \text{im Falle des Anderson-Modells.} \end{cases}$$

Die Funktion  $\frac{dN}{dE}$  nennt man Zustandsdichte .



## Kapitel 5

# Lokalisierung für Legierungs-Potentiale mit kleinem negativem Anteil

Gegenstand dieses Kapitels ist der Nachweis der Anfangsskalen-Bedingung für indefinite Legierungs-Modelle. Diese Resultate bilden zusammen mit der Wegner-Abschätzung aus Kapitel 4 und dem Theorem 2.2.11 einen Lokalisierungs-Beweis. Dazu muß man annehmen, daß der negative Anteil des Einzelplatz-Potentials klein ist.

Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem, ob der Energiebereich, den man betrachtet, am Infimum der Spektrums oder an inneren spektralen Rändern liegt. Dies entspricht den Theoremen 2.1.10 und 2.1.11.

### 5.1 Lokalisierung am Infimum des Spektrums

Bei Anderson- oder Legierungs-Potentialen mit nicht-negativen Einzelplatz-Potentialen wird die Lifschitz-Asymptotik der integrierten Zustandsdichte genutzt, um die Anfangsskalen-Abschätzung für die Multiskalen-Analyse nachzuweisen, vgl. die beiden Abschnitte 2.2 und 3.2. Alle Resultate, bei denen diese Asymptotik der integrierten Zustandsdichte nicht benutzt wird, stellen spezielle Annahmen an die Unordnung, vgl. die Annahme 2.1.E in dieser Arbeit oder die Bedingungen an das Unordnungs-Maß  $\delta_0$  in dem Artikel [CH94]. Diese Voraussetzungen sind technischen Ursprungs und physikalisch kaum motivierbar.

Für indefinite Legierungs-Modelle gestaltet sich die Problematik komplizierter, da der Nachweis der Lifschitz-Tails nicht übertragbar ist auf diesen Fall. Selbst bei einer kleinen negativen Störung des Einzelplatz-Potentials bricht die Argumentation des Beweises zusammen. Trotzdem liefern die in dem Be-

weis der Lifschitz-Asymptotik verwendeten unteren Schranken für den tiefsten Neumann-Eigenwert des Schrödinger-Operators auf großen Würfeln  $\Lambda_L$  auch im Fall indefiniter Legierung-Modelle brauchbare Abschätzungen. Allerdings muß dafür der negative Anteil des Potentials an einen kleinen Parameter  $\epsilon$  gekoppelt sein. Aus technischen Gründen ist es in unserem Zusammenhang besser periodische Randbedingungen zu verwenden.

Wegen des Zusammenhangs

$$\epsilon \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad L \rightarrow \infty$$

kann man  $\epsilon$  nicht uniform wählen für beliebig große Skalen  $L$  und deshalb eignen sich die Methoden dieser Arbeit nicht für den Nachweis der Lifschitz-Tails im indefiniten Fall.

### **Bemerkung 5.1.1**

Um präzisieren zu können, was wir unter einem Einzelplatz-Potential  $u$  mit kleinem negativen Anteil verstehen, spalten wir  $u$  entsprechend dem Vorzeichen auf

$$u = u_+ - c_- u_-, \quad u_+, u_- \geq 0, \quad c_- \in [0, 1]. \quad (5.1)$$

Wir setzen  $N := \|\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_-(\cdot - k)\|_\infty$  und nehmen an, daß  $\|u_-\|_\infty \leq 1$  und  $\text{supp } u_- \subset \Lambda_g, g \in \mathbb{N}$  ist.

Die Einschränkung der Operatoren  $H_0$  und  $H_\omega$  auf  $\Lambda_L$  mit Neumann-Randbedingungen bezeichnen wir mit  $H_0^{L,N}$  bzw.  $H_\omega^{L,N}$  und die entsprechenden integrierten Zustandsdichten mit  $N_0^{L,N}$  bzw.  $N_\omega^{L,N}$ .

Wir brauchen eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\{\omega \mid \sigma(H_\omega^L) \cap ]-\infty, E[ \neq \emptyset\} = \mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_\omega^L) \leq E\} \quad (5.2)$$

Spektralwerte von  $H_\omega^L$  in einer Umgebung von  $0 = \inf \sigma(H_0) \in \sigma(H_\omega)$  anzutreffen. Hierbei kann  $H_\omega^L$  Dirichlet-, Neumann- oder periodische Randbedingungen besitzen. Wie in [KS86] führen wir dies auf die Untersuchung des niedrigsten Neumann-Eigenwerts von  $H_\omega^{L,N}$  zurück.

Wir zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit in (5.2) exponentiell abfällt mit großem  $L$ . Der Beweis beruht einerseits darauf, daß der erste Eigenwert  $\lambda_1$  nur für seltene Potentialkonfigurationen sehr kleine Werte (d.h. Werte nahe bei oder unterhalb von 0) annimmt, andererseits auf einem Resultat über Große Abweichungen, welches besagt, daß solche seltenen Konfigurationen nur mit einer Wahrscheinlichkeit auftauchen, die exponentiell klein ist in  $L$ .

Im Folgenden passen wir die Abschätzungen aus [KS86] für den tiefsten Neumann-Eigenwert an. In Gegensatz zu unserer Annahme (5.1) gelten die

Schranken in [KS86] nur für Einzelplatz-Potentiale mit positivem Vorzeichen. Wie dort nehmen wir an, daß das periodische Potential  $V_0$  symmetrisch ist bezüglich Spiegelungen an den Koordinaten-Achsen, vgl. Annahme 2.1.D.

Sei  $\phi$  der Grundzustand von  $H_0^{1,N}$  und  $\Phi$  dessen periodische Fortsetzung auf ganz  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist  $\psi_L := |\Lambda_L|^{-1/2} \Phi \chi_{\Lambda_L}$  der Grundzustand von  $H_0^{L,N}$  und  $H_0^{L,\text{per}}$ . Für den tiefsten Eigenwert gilt dann :

$$\lambda_1(H_0^{L,N}) = \lambda_1(H_0^{L,\text{per}}) = \lambda_1(H_0^{1,\text{per}}) = \inf \sigma(H_0),$$

wobei die letzte Gleichheit aus Abschnitt 6.9 von [Eas73] folgt. Indem man eine Konstante zu  $V_0$  addiert, kann man

$$\inf \sigma(H_0) = 0$$

annehmen. Wir setzen

$$m_k := \int dx u^k(x) \Phi(x), \quad k = 1, 2$$

und nehmen an, daß  $c_-$  so klein ist, daß  $m_1$  strikt positiv ist. Wir wählen die Längenskala  $L \in 2\mathbb{N}$  in Abhängigkeit einer Energie  $E \in ]0, 1[$ :

$$L = L(E) = [(\beta E)^{-1/2}]_2. \quad (5.3)$$

### Proposition 5.1.2

Es existieren  $\beta_0, L_0$ , so daß für  $L \geq L_0, \beta \geq \beta_0$  und  $c_- \leq E(8\omega_+ N)^{-1}$  gilt:

$$\lambda_1(H_\omega^{L,N}) < E \implies \# \left\{ k \in \Lambda_L \mid \omega_k < \frac{4E}{m_1} \right\} > \frac{13}{12} \frac{L^d}{2}.$$

Die Konstanten  $\beta_0$  und  $L_0$  hängen nur von  $d, g, u$  und  $V_0$  ab.

Die Proposition ist eine Verallgemeinerung von Proposition 2 in [KS86] für Einzelplatz-Potentiale mit wechselndem Vorzeichen. Der Beweis folgt ebenfalls den Ausführungen in [KS86] und beruht auf Temples Ungleichung, vgl. Theorem XIII.15 in [RS78].

### Lemma 5.1.3 (Ungleichung von Temple)

Sei  $H$  ein von unten beschränkter selbstadjungierter Operator, welcher am unteren Ende des Spektrums mindestens zwei disjunkte Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 < \lambda_2$  besitzt. Sei  $\xi$  eine reelle Zahl und  $\psi$  ein normierter Vektor im Definitionsbereich von  $H$ , so daß gilt:

$$\langle \psi, H\psi \rangle < \xi \leq \lambda_2.$$

Dann folgt:

$$\lambda_1 \geq \langle \psi, H\psi \rangle - \frac{\langle \psi, H^2\psi \rangle - \langle \psi, H\psi \rangle^2}{\xi - \langle \psi, H\psi \rangle}.$$

**Beweis von Proposition 5.1.2:**

Aus [KS85, KS87] wissen wir, daß der Abstand zwischen dem ersten und dem zweiten Neumann-Eigenwert mindestens quadratisch in der inversen Länge  $L^{-1}$  ist.

$$\lambda_2(H_0^{L,N}) \geq \lambda_1(H_0^{L,N}) + \alpha L^{-2} = \alpha L^{-2} \geq \alpha \beta E.$$

Wir wählen

$$\beta_0 \geq \alpha^{-1} \left( 10 + 32|\Lambda_{2g}| \frac{m_2}{m_1^2} + \frac{1}{8} \right)$$

und nehmen ohne Einschränkung an, daß  $m_1$  positiv und  $\beta$  größer als Eins ist. Dann folgt

$$\lambda_2(H_0^{L,N}) \geq \alpha \beta E = \left( 10 + 32|\Lambda_{2g}| \frac{m_2}{m_1^2} + \frac{1}{8} \right) E$$

Nun definieren wir einen Hilfs-Operator  $\tilde{H}_\omega$ , auf den wir Temples Ungleichung anwenden wollen.

$$\tilde{H}_\omega := H_0 + V_{\tilde{\omega}}, \quad \tilde{\omega}_k := \min \left( \omega_k, \frac{8E}{m_1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Aus} \quad V_{\tilde{\omega}} - V_\omega &= \sum_k (\tilde{\omega}_k - \omega_k) (u_+(\cdot - k) - c_- u_-(\cdot - k)) \\ &\leq c_- \sum_k (\omega_k - \tilde{\omega}_k) u_-(\cdot - k) \\ &\leq \frac{E}{8\omega_+ N} \omega_+ N = \frac{E}{8} \end{aligned} \quad (5.4)$$

folgt  $\lambda_1(H_\omega^{L,N}) \geq \lambda_1(\tilde{H}_\omega^{L,N}) - \frac{E}{8}$ . Wir können den Erwartungswert des Hilfs-Operators  $\tilde{H}_\omega^{L,N}$  im Grundzustand  $\psi$  des periodischen Operators  $H_0^{L,N}$  für

$$L > g \max \left( (\sqrt[d]{9/8} - 1)^{-1}, 2^{d-2}d \right)$$

folgendermaßen abschätzen

$$\begin{aligned} \langle \psi, \tilde{H}_\omega^{L,N} \psi \rangle &= \langle \psi, V_{\tilde{\omega}} \psi \rangle \\ &= \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k \int_{\Lambda_L} u(x-k) \psi^2(x) dx \\ &= \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k \int_{\Lambda_L} u(x-k) \Phi^2(x) dx \\ &= \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k m_1 - \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k \int_{\Lambda_L^c} u(x-k) \Phi^2(x) dx \\ &\leq 8E \frac{(L+g)^d}{L^d} + \frac{2^{d-2}gdE}{L} \\ &\leq 10E. \end{aligned}$$



Dabei nutzen wir aus, daß  $\Phi$  auf einem Einheitswürfel die Norm Eins hat und daß für  $L > g$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k \int_{\Lambda_L^c} u(x-k) \Phi^2(x) dx \\
& \geq -\frac{1}{L^d} c_- \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k \int_{\Lambda_L^c} u_-(x-k) \Phi^2(x) dx \\
& \geq -\frac{c_- \omega_+}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \int_{\Lambda_L^c} u_-(x-k) \Phi^2(x) dx \\
& \geq -\frac{c_- \omega_+ N}{L^d} \int_{\Lambda_{2L+g} \setminus \Lambda_L} \Phi^2(x) dx \\
& = -\frac{2^{d-2} g d E}{L}.
\end{aligned}$$

gilt. Für den freien Parameter im Nenner der Templeschen Ungleichung wählen wir  $\xi := \lambda_2(H_0^{L,N}) - \frac{E}{8}$ , welches kleiner oder gleich  $\lambda_2(\tilde{H}_\omega^{L,N})$  ist, da ähnlich wie in (5.4) gilt

$$\sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k u(\cdot - k) \geq -c_- \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \omega_+ u_-(\cdot - k) \geq -\frac{E}{8}.$$

Dann folgt für den Nenner in der Ungleichung von Temple

$$\begin{aligned}
\xi - \langle \psi, \tilde{H}_\omega^{L,N} \psi \rangle &= \lambda_2(H_0^{L,N}) - \frac{E}{8} - \langle \psi, \tilde{H}_\omega^{L,N} \psi \rangle \\
&\geq \left( 10 + 32 |\Lambda_{2g}| \frac{m_2}{m_1^2} + \frac{1}{8} \right) E - \frac{E}{8} - 10E \\
&\geq 32 |\Lambda_{2g}| \frac{m_2}{m_1^2} E.
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert des Potentialquadrats  $\langle \psi, (\tilde{V}_\omega)^2 \psi \rangle = \langle \psi, (\tilde{H}_\omega^{L,N})^2 \psi \rangle$  läßt sich wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
\langle \psi, (\tilde{V}_\omega)^2 \psi \rangle &= \frac{1}{|\Lambda_L|} \int_{\Lambda_L} \sum_{\substack{j, k \in \Lambda_{L+g} \\ |j-k| \leq g}} \tilde{\omega}_k \tilde{\omega}_j u(x-k) u(x-j) \Phi^2(x) dx \\
&\leq 8E \frac{1}{|\Lambda_L|} \frac{1}{m_1} \sum_{\substack{j, k \in \Lambda_{L+g} \\ |j-k| \leq g}} \tilde{\omega}_k \int_{\Lambda_L} |u(x-k)| |u(x-j)| \Phi^2(x) dx \\
&\leq 8E \frac{|\Lambda_{2g}|}{|\Lambda_L|} \frac{m_2}{m_1} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k
\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert des Operators  $\langle \psi, \tilde{H}_\omega^{L,N} \psi \rangle$  brauchen wir noch eine untere Schranke. Dabei ist abzuschätzen, wie groß der Fehler ist, wenn in

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x) \Phi^2(x) dx$$

den Integrationsbereich auf  $\Lambda_L$  eingeschränkt wird.

$$\begin{aligned}
 \langle \psi, \tilde{H}_\omega^{L,N} \psi \rangle &= \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k \int_{\Lambda_L} u(x-k) \Phi^2(x) dx \\
 &= \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k \int_{\mathbb{R}^d} u(x-k) \Phi^2(x) dx - \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k \int_{\Lambda_L^c} u(x-k) \Phi^2(x) dx \\
 &\geq \frac{m_1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k - \frac{8E}{L^d m_1} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \int_{\Lambda_L^c} u_+(x-k) \Phi^2(x) dx \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

Für den zweiten Term in (5.5) ergibt sich die untere Schranke

$$-\frac{16Edg}{Lm_1} \int_{\mathbb{R}^d} u_+(x-k) \Phi^2(x) dx \geq -\frac{E}{8}, \quad (5.6)$$

falls wir

$$L \geq \frac{128dg}{m_1} \int_{\mathbb{R}^d} u_+(x) \Phi^2(x) dx \quad (5.7)$$

wählen.<sup>1</sup> Jetzt fügen sich die Abschätzungen zusammen zu

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(H_\omega^{L,N}) &\geq \lambda_1(\tilde{H}_\omega^{L,N}) - \frac{E}{8} \\
 &\geq \langle \psi, \tilde{H}_\omega^{L,N} \psi \rangle - \frac{\langle \psi, (\tilde{H}_\omega^{L,N})^2 \psi \rangle}{\xi - \langle \psi, \tilde{H}_\omega \psi \rangle} - \frac{E}{8} \\
 &\geq \langle \psi, \tilde{H}_\omega^{L,N} \psi \rangle - \frac{8E \frac{|\Lambda_{2g}|}{|\Lambda_L|} \frac{m_2}{m_1} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k}{32 |\Lambda_{2g}| \frac{m_2}{m_1} E} - \frac{E}{8} \\
 &\geq \left[ \frac{m_1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k - \frac{E}{8} \right] - \frac{1}{4} \frac{m_1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k - \frac{E}{8} \\
 &\geq \frac{3}{4} \frac{m_1}{L^d} \sum_{k \in \Lambda_{L+g}} \tilde{\omega}_k - \frac{E}{4}.
 \end{aligned}$$

Angenommen, die Aussage des Satzes ist falsch. Dann gilt

$$\# \left\{ k \in \Lambda_L \mid \omega_k \geq \frac{4E}{m_1} \right\} > \frac{11}{12} \frac{L^d}{2}$$

und impliziert wegen  $\omega_k \geq 4E/m_1 \implies \tilde{\omega}_k \geq 4E/m_1$

$$E > \lambda_1(H_\omega^{L,N}) \geq \frac{3}{2} \left( \frac{11}{12} E \right) - \frac{1}{4} E = \frac{9}{8} E,$$

was zum Widerspruch führt.

**q.e.d.**

<sup>1</sup>Man beachte, daß durch die Wahl (5.7)  $L$  eine Funktion von  $c_-$  ist und gleichzeitig — gemäß der Annahme in der Proposition — auch  $c_-$  eine Funktion von  $L$ . Wie in Bemerkung (5.1.4) erklärt, führt diese gegenseitige Abhängigkeit zu keinem Widerspruch.

**Bemerkung 5.1.4**

Der Parameter  $m_1 := m_1(c_-)$  hängt unter anderem von  $c_-$  ab. Daher muß man genauer untersuchen, ob die Abhängigkeit der Skala  $L$  von  $c_-$  mit der Abhängigkeit des Parameters  $c_-$  von  $L$  verträglich ist.

Dazu wählt man in (5.7)

$$\begin{aligned} L &\geq \frac{128dg}{m_1(c_- = 1)} \int_{\mathbb{R}^d} u_+(x) \Phi^2(x) dx \\ &\geq \frac{128dg}{m_1(c_-)} \int_{\mathbb{R}^d} u_+(x) \Phi^2(x) dx \quad \forall c_- \in [0, 1] \end{aligned}$$

und hat damit die Bedingung (5.6) für alle  $c_- \in [0, 1]$  gleichzeitig erfüllt. Insbesondere kann man den Parameter  $c_-$  verkleinern, ohne die Anfangsskala  $L_0$  ändern zu müssen.

Sei  $\epsilon_0 := \epsilon_0(f) < 0$  so gewählt, daß  $\mathbb{P}\{\omega_0 \geq \epsilon_0\} = 11/12$ . Für

$$L \geq \frac{2}{\sqrt{\beta m_1(c_- = 1) \epsilon_0}} \geq \frac{2}{\sqrt{\beta m_1(c_-) \epsilon_0}}$$

gilt

$$\epsilon_0 \geq \frac{4L^{-2}}{\beta m_1(c_-)} \geq \frac{4E}{m_1(c_-)} \quad \forall c_- \in [0, 1].$$

Nun besagt Theorem 4.2 in [Sim85], daß

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \omega \mid \# \left\{ k \in \Lambda_L \mid \omega_k \geq \frac{4E}{m_1} \right\} < \frac{11}{12} \frac{L^d}{2} \right\} \\ &\leq \mathbb{P} \left\{ \omega \mid \# \left\{ k \in \Lambda_L \mid \omega_k \geq \epsilon_0 \right\} < \frac{11}{12} \frac{L^d}{2} \right\} \leq \exp \left( - \left( \frac{11}{12} \right)^2 \frac{L^d}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Zusammen mit den Gleichungen (5.3) und (5.8) besagt Proposition 5.1.2 für  $\beta \geq \beta_0$ ,  $L \geq L_0$  und  $c_- \leq E(8\omega_+ N)^{-1}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_\omega^L) < \beta^{-1}(L+2)^{-2}\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_\omega^L) < E\} \\ &\leq \mathbb{P} \left\{ \omega \mid \# \left\{ k \in \Lambda_L \mid \omega_k < \frac{4E}{m_1} \right\} > \frac{13}{12} \frac{L^d}{2} \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ \omega \mid \# \left\{ k \in \Lambda_L \mid \omega_k \geq \frac{4E}{m_1} \right\} < \frac{11}{12} \frac{L^d}{2} \right\} \\ &\leq e^{-\left(\frac{11}{12}\right)^2 \frac{L^d}{2}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dabei hängt  $L_0$  nur von  $d, g, f, u, V_0$  und  $\beta$  ab. Die Energie  $E$  wird als Funktion von  $L$  aufgefaßt.

Ein Abstand der Größenordnung  $L^{-2}$  zwischen der betrachteten Energie  $E$  und dem Spektrum  $\sigma(H_\omega^L)$  ist *nicht* ausreichend zum Start der Multiskalen-Analyse, vgl. Bemerkung 2.2.2. Dies kann man in unserer Situation kompensieren, da die Wahrscheinlichkeit  $e^{-cL^d}$  in (5.9) viel kleiner ist als für das Ereignis  $\mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_\omega^L) \leq \beta^{-1}(L+2)^{-2}\}$  erlaubt, vgl. Theorem 2.2.11. Dazu zerlegt man den Würfel der Seitenlänge  $L$  in kleinere Würfel  $\Lambda_l$  und wendet wie in (4.17) die Technik des Dirichlet-Neumann-Bracketing auf diese Zerlegung an. Wir erwähnten dieses Vorgehen als mögliche Alternative (b) auf Seite 46. Diese Abhilfe wurde in Abschnitt 4 von [KSS98b] benutzt, implizit findet man sie schon auf Seite 208 in [MH84].

Sei  $l$  die Kantenlänge der kleineren Würfel in die wir  $\Lambda_L$  zerlegen:

$$\Lambda_L = \bigcup_{j \in (\mathbb{Z})^d \cap \Lambda_L} \Lambda_l + j$$

Wie auf Seite 79 bezeichnen wir mit  $H_{\omega,j}$  den Schrödinger-Operator  $H_\omega$  eingeschränkt mit Neumann-Randbedingungen auf  $\Lambda_l + j$ . Da die Einführung von Neumann-Flächen in  $\Lambda_L$  die Eigenwerte senkt, gilt

$$\lambda_1(H_\omega^L) \leq \inf_{j \in (\mathbb{Z})^d \cap \Lambda_L} \lambda_1(H_{\omega,j}).$$

und somit für die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_\omega^{L,N}) \leq \beta^{-1}(l+2)^{-2}\} \\ & \leq \mathbb{P}\left\{\omega \mid \inf_{j \in (\mathbb{Z})^d \cap \Lambda_L} \lambda_1(H_{\omega,j}) \leq \beta^{-1}(l+2)^{-2}\right\} \\ & \leq \sum_{j \in (\mathbb{Z})^d \cap \Lambda_L} \mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_{\omega,j}) \leq \beta^{-1}(l+2)^{-2}\} \\ & \leq \left(\frac{L}{l}\right)^d \mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_{\omega,j}) \leq \beta^{-1}(l+2)^{-2}\} \\ & \leq \left(\frac{L}{l}\right)^d e^{-\left(\frac{11}{12}\right)^2 \frac{l^d}{2}} \quad (5.10) \end{aligned}$$

Wir wählen ein passendes  $l$ . Für  $l := \lfloor L^{1-\zeta/2} \beta^{-1/2} - 2 \rfloor_2$  gilt

$$L^{-2+\zeta} \leq \beta^{-1}(l+2)^{-2}$$

und somit

$$\mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_\omega^L) < L^{-2+\zeta}\} \leq \mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_\omega^L) < \beta^{-1}(l+2)^{-2}\}. \quad (5.11)$$

Damit steht der Beweis für folgende

**Proposition 5.1.5**

Seien  $\zeta \in ]0, 1[$  und  $q \in \mathbb{N}$  gegeben. Dann existiert ein  $L_0 < \infty$ , so daß für alle  $L \geq L_0, L \in 2\mathbb{N}$  gilt:

$$\mathbb{P}\{\omega \mid \sigma(H_\omega^L) \cap ]-\infty, L^{-2+\zeta}[ \} = \mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_\omega^L) < L^{-2+\zeta}\} \leq L^{-q},$$

falls der Parameter  $c_-$  des negativen Anteils von  $u$  die Bedingung

$$c_- \leq (8\omega_+ N\beta(L+2)^2)^{-1}$$

erfüllt, vgl. Bemerkung 5.1.1. Hierbei kann  $H_\omega^L$  Dirichlet-, Neumann- oder periodische Randbedingungen besitzen. Die zulässige Anfangsskala  $L_0$  hängt nur von  $d, g, f, u, V_0, \beta, \zeta$  und  $q$  ab.

**Beweis:**

Die Gleichungen (5.10) und (5.11) besagen:

$$\mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_\omega^L) < L^{-2+\zeta}\} \leq \left(\frac{L}{l}\right)^d e^{-\left(\frac{11}{12}\right)^2 \frac{l^d}{2}}.$$

Für  $\zeta < 1$  und genügend großes  $L$  in Abhängigkeit von  $d, \beta$  und  $\zeta$  ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner als  $L^{\zeta d} e^{-L^{(1-\zeta)d}}$ . Dieser Term ist von oben beschränkt durch  $L^{-q}$ , falls  $L$  groß gewählt wird abhängig von  $q, d$  und  $\zeta$ .

**q.e.d.**

**Korollar 5.1.6**

Sei  $u$  ein Treppen-Potential im Sinne von 2.1.C(i):

$$u(x) = \sum_{k \in \Gamma} \alpha_k \chi_k, \quad \alpha_0 = 1 \text{ und } \alpha^* := \sum_{l \neq 0} |\alpha_l| < 1.$$

Für  $\zeta \in ]0, 1[$  und  $q \in \mathbb{N}$  existiert eine Anfangsskala  $L_0 < \infty$ , so daß für alle  $L \geq L_0$  aus

$$\sup_{k \in \Gamma, \alpha_k < 0} |\alpha_k| < (8\omega_+ N\beta(L+2)^2)^{-1} \quad (5.12)$$

folgt

$$\mathbb{P}\{\omega \mid \sigma(H_\omega^L) \cap ]-\infty, L^{-2+\zeta}[ \} = \mathbb{P}\{\omega \mid \lambda_1(H_\omega^L) < L^{-2+\zeta}\} \leq L^{-q}.$$

Die zulässige Anfangsskala  $L_0$  hängt nur von  $d, g, f, \alpha, V_0, \beta, \zeta$  und  $q$  ab.

**Bemerkung 5.1.7**

Aus dem Beweis von Proposition 5.1.2 ist sofort ersichtlich, daß man Bedingung (5.12) durch

$$\sum_{k \in \Gamma, \alpha_k < 0} |\alpha_k| < (8\omega_+ \beta(L+2)^2)^{-1}$$

ersetzen kann.

## 5.2 Lokalisierung an inneren Spektralkanten

Wir wenden uns nun dem Lokalisierungs-Problem an inneren spektralen Kanten zu. Wiederum gilt es abzuschätzen, wie wahrscheinlich es ist, daß Spektralwerte eines restringierten Operators  $H_\omega^l$  in die Nähe der spektralen Ränder fallen. In diesem Zusammenhang ist es günstiger Eigenwerte des Operators  $H_\omega^{l,\text{per}}$  mit periodischen Randbedingungen zu betrachten. Hierzu stellen wir die Annahme 2.1.E an die Unordnungsparameter  $\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d$ . Es existiert ein  $\tau > d/2$ , so daß gilt:

$$\int_0^h f(x) dx \leq h^\tau \quad \text{sowie} \quad (5.13a)$$

$$\int_{\omega_+-h}^{\omega_+} f(x) dx \leq h^\tau, \text{ beides für genügend kleine } h. \quad (5.13b)$$

### Proposition 5.2.1

Sei  $\chi_0$  die charakteristische Funktion von  $[0, 1]^d$ . Das Einzelplatz-Potential erfülle die Bedingungen aus Bemerkung 5.1.1 und  $u_+ \geq c_+ \chi_0$ . Seien  $q \in ]0, 2\tau - d[$  und  $\zeta \in ]0, 2 - \frac{d+q}{\tau}[$ .

(a) Sei  $E_-$  eine untere spektrale Kante von  $H_\omega$  und es gelte (5.13a). Dann existiert ein  $l_0 < \infty$ , so daß für alle  $l \geq l_0$  und  $c_- \leq \frac{l^{-2+\zeta}}{\omega_+ N}$  gilt:

$$\mathbb{P}\{\omega \mid d(\sigma(H_\omega^{l,\text{per}}), E_-) \geq l^{-2+\zeta}\} \geq 1 - l^{-q}. \quad (5.14a)$$

(b) Sei  $E_+$  eine obere spektrale Kante von  $H_\omega$  und es gelte (5.13b). Dann existiert ein  $l_0 < \infty$ , so daß für alle  $l \geq l_0$  und  $c_- \leq \frac{l^{-2+\zeta}}{\omega_+ N}$  gilt:

$$\mathbb{P}\{\omega \mid d(\sigma(H_\omega^{l,\text{per}}), E_+) \geq l^{-2+\zeta}\} \geq 1 - l^{-q}. \quad (5.14b)$$

Diese Aussage ist im Fall  $u_- = 0$  der Inhalt von Proposition 4.1 in [KSS98b] bzw. Theorem 2.2.1 in [Sto]. Wir passen den Beweis für  $u$  mit wechselndem Vorzeichen an.

### Bemerkung 5.2.2

In diesem Zusammenhang ist es wichtig zu bemerken, daß auch für  $u$  mit wechselndem Vorzeichen die Inklusion

$$\sigma(H_\omega) \supset \bigcup_{t \in [0, \omega_+]} \sigma \left( H_0 + t \sum_k u(\cdot - k) \right) \quad (5.15)$$

gilt. In Abschnitt 1 von [KSS98b] findet man einen Beweis für  $u \geq 0$ , der wortwörtlich für den allgemeinen Fall übernommen werden kann. Ob die umgekehrte Inklusion auch für  $u$  ohne feste Vorzeichen gilt, ist unklar. Weitere

Informationen dazu findet man in [KM82c], siehe speziell Theorem 5 und das nachfolgende Korollar.

Die Floquet-Zerlegung und (5.15) implizieren

$$\sigma(H_\omega) \supset \sigma\left(H_0 + t \sum_k u(\cdot - k)\right) \supset \sigma\left([H_0 + t \sum_k u(\cdot - k)]^{l,\text{per}}\right)$$

für alle  $t \in [0, \omega_+]$ ,  $l \in 2\mathbb{N}$ . Allgemeiner folgt mit einer leichten Anpassung der Argumente in [KSS98b]

$$\sigma(H_\omega) \supset \sigma(H_{l,\omega}) \supset (H_\omega^{l,\text{per}}). \quad (5.16)$$

Genauer gesagt, ist für jedes  $\omega \in \Omega$  das Spektrum von  $H_\omega^{l,\text{per}}$  in der deterministischen Menge  $\sigma(H_\omega)$  enthalten. Dabei ist wie in Kapitel 3 der Operator  $H_{l,\omega}$  gegeben durch die Summe aus  $H_0$  und der periodischen Fortsetzung, von  $V_\omega \chi_{\Lambda_l}$  auf den ganzen Raum  $\mathbb{R}^d$ .

Insbesondere folgt, daß für alle  $\omega \in \Omega$

$$d(\sigma(H_\omega^{l,\text{per}}) \cap ]-\infty, E_-[, E_-) \geq \rho$$

gilt, wobei  $\rho$  die Länge der spektralen Lücke von  $\sigma(H_\omega)$  ist, an dessen Rand sich  $E_-$  befindet. Dies ist eine ergänzende Information zu (5.14a). Anders formuliert, falls sich von unterhalb von  $E_-$  eine spektrale Lücke des Operators  $H_\omega$  befindet, dann existiert auch im Spektrum  $\sigma(H_\omega^{l,\text{per}})$  des restringierten Operators eine Lücke unterhalb von  $E_-$  von mindestens derselben Länge.

### Beweis von Proposition 5.2.1:

Wir beweisen nur die Aussage (a), der zweite Teil wird analog bewiesen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei  $l$  so groß, daß  $2l^{-2+\zeta}$  kleiner ist als die Länge der spektralen Lücke, an dessen Rand sich  $E_-$  befindet.

Wie in [KSS98b] setzen wir  $\Omega_{l,2h} := \{\omega \mid \omega_k \geq 2h, \forall k \in \Lambda_l\}$ . Dabei ist  $l \in 2\mathbb{N}$  die Kantenlänge des Würfels  $\Lambda_l \subset \mathbb{R}$ . Sei  $h := \frac{1}{c_+} l^{\zeta-2}$ , dann gilt wie im zitierten Artikel

$$\mathbb{P}(\Omega_{l,2h}) \geq 1 - \left(\frac{2}{c_+}\right)^\tau l^{d-\tau(2-\zeta)} \geq 1 - l^{-q}$$

für genügend großes  $l$  in Abhängigkeit von  $d, \tau, \zeta, c_+$  und  $q$ .

Für jedes  $\omega \in \Omega_{l,2h}$  und  $c_- \leq \frac{c_+ h}{\omega_+ N}$  gilt

$$\begin{aligned} V_\omega(x) &\geq 2h \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_+(x - k) - c_- \omega_+ \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_-(x - k) \\ &\geq 2h \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_+(x - k) - c_- \omega_+ N \\ &\geq 2c_+ h - c_+ h = c_+ h \end{aligned}$$

Also verschiebt  $V_\omega$  die Eigenwerte des periodischen Operators  $H_0$  um mindestens  $c_+h$  nach oben. Wegen  $\sigma(H_0) \subset \sigma(H_\omega)$  folgt aus dem Min-Max-Prinzip

$$d(\sigma(H_\omega^{l,\text{per}}) \cap ]E_-, \infty[, E_-) \geq d(\sigma(H_0^{l,\text{per}} + c_+h) \cap ]E_-, \infty[, E_-) = c_+h = l^{\zeta-2}.$$

Für den Beweis der Aussage (5.14b) betrachtet man die Menge

$$\hat{\Omega}_{l,2h} := \{\omega \mid \omega_k \leq \omega_+ - 2h, \forall k \in \Lambda_l\}$$

und geht analog vor.

**q.e.d.**

Das Theorem 2.2 in [KSS98b] könnte zur Verallgemeinerung dienen, falls man die Bedingung  $u_+ \geq \chi_0$  abschwächt, und nur annimmt, daß  $u_+$  auf einer echten Teilmenge des Einheitswürfels eine uniforme untere Schranke besitzt.

Wir formulieren das Resultat für Potentiale mit verallgemeinerter Treppenform.

**Korollar 5.2.3**

Das Einzelplatz-Potential erfülle die Bedingungen aus Bemerkung 5.1.1 und Annahme 2.1.C (i) und die Dichte der Kopplungskonstanten die Bedingungen (5.13). Sei  $E$  eine spektrale Kante. Dann existiert ein  $l_0 < \infty$ , so daß für alle  $l \geq l_0$  aus

$$\sup_{k \in \Gamma, \alpha_k < 0} |\alpha_k| \leq \frac{l^{-2+\zeta}}{\omega_+ N} \tag{5.17}$$

folgt:

$$\mathbb{P}\{\omega \mid d(\sigma(H_\omega^{l,\text{per}}), E) \geq l^{\zeta-2}\} \geq 1 - l^{-q}.$$

Wiederum kann man Bedingung (5.17) durch das etwas schwächere Aussage

$$\sum_{k \in \Gamma, \alpha_k < 0} |\alpha_k| < \frac{l^{-2+\zeta}}{\omega_+ N}$$

ersetzen.



# Kapitel 6

## Diskussion der Resultate und Ausblick

### 6.1 Naheliegende Verallgemeinerungen

#### Langreichweitige Einzelplatz-Potentiale

Wie auf Seite 43 schon erwähnt kann der Beweis von Theorem 2.1.4 auch für langreichweitige Einzelplatz-Potentiale  $u$  angepaßt werden. Dies sind Funktionen, die im Raum polynomial abfallen

$$|u(x)| \leq \text{const}|x|^{-m}.$$

Der Exponent muß  $m > 2d$  oder  $m > 4d$  erfüllen, je nachdem, welche Techniken man verwendet. Der Lokalisierungs-Beweis erfolgt mit der modifizierten Multiskalen-Analyse aus [KSS97, KSS98a] oder [Zen99]. Je nach Annahme kann man exponentiellen oder polynomialen Abfall der Eigenfunktionen beweisen.

#### Bedingung (2.12) an den Faltungsvektor

Überlegungen anhand von Beispielen (vgl. 2.1.17,2.1.18) legen nahe, daß die Bedingung (2.10) an den Faltungsvektor für den Beweis von Theorem 2.1.12 unnötig ist. Man müßte nur verlangen, daß  $\Gamma = \{k \in \mathbb{Z}^d \mid \alpha_k \neq 0\}$  endlich ist.

#### Lokalisierung am Infimum des Spektrums für allgemeinere Potentiale

Proposition 5.1.5 stellt eine Anfangsskalen-Abschätzung für indefinite Einzelplatz-Potentiale  $u$  mit kleinem negativen Anteil dar. Sie setzt nicht voraus, daß  $u$  eine verallgemeinerte Treppenform hat.

In Abschnitt 2.3 stellten wir bereits Klopps Wegner-Abschätzung [Klo95c] vor. Sie ist für Energie-Intervalle in einer Umgebung von  $\inf \sigma(H_\omega)$  gültig. Das Einzelplatz-Potential darf eine beliebige Funktion  $0 \neq u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit kompaktem Träger sein. Die Dichte  $f$  der Kopplungskonstanten ist aus einer Menge, die  $C_0^1(\mathbb{R})$  enthält.

Diese beiden Ergebnisse ergänzen sich mit dem Theorem 2.2.11 über die Multiskalen-Analyse zu einem Lokalisierungs-Beweis. Das Ergebnis ist eine Verallgemeinerung von Theorem 2.1.10, da man auf die Treppenform von  $u$  verzichten kann.

### Floquet-reguläre Kanten und indefinite Einzelplatz-Potentiale

Es ist naheliegend, die Theoreme 2.1.4 und 2.1.11 miteinander zu kombinieren. Das Ergebnis wäre Lokalisierung in einer Umgebung einer unteren, Floquet-regulären spektralen Kante  $E_0$ . Das Einzelplatz-Potentiale könnte einen kleinen negativen Anteil besitzen und die spezielle Voraussetzung 2.1.E an die Kopplungskonstanten wäre unnötig. Hier ist eine mögliche Strategie für den Beweis:

1. Sei  $V_\omega(x) = \sum_k \omega_k u(x - k)$  das betrachtete Legierungs-Potentiale mit indefinitem  $u$ .
2. Für  $H_+ = H_0 + \sum_k \omega_k u_+(x - k)$  folgert man aus [Klo99] die Existenz von Lifschitz-Tails bei  $E_0$ . Sei  $N(H_+, \cdot)$  die integrierte Zustandsdichte von  $H_+$ .
3. Mit den Methoden von Kapitel 3 schätzt man

$$N(H_+^{l,\text{per}}, E_0 + E) - N(H_+^{l,\text{per}}, E_0) \quad (6.1)$$

ab. Dabei müssen  $E$  und  $l$ , wie in Abschnitt 3.2 erklärt, eine geeignete Energie-Längen Relation erfüllen.

4. Nun perturbiert man  $u_+$  durch einen kleinen negativen Anteil  $-c_- u_-$ . Mit Hilfe des Min-Max-Prinzips folgt, daß (6.1) zu einer ähnlichen Schranke von  $N_\omega^{l,\text{per}}(E_0 + E) - N_\omega^{l,\text{per}}(E_0)$  führt.
5. Man muß beachten, daß bei der Wahl von  $l$  und  $c_-$  keine widersprüchlichen Bedingungen auftreten.
6. Der Rest des Beweises folgt den Argumenten von Abschnitt 5.2.

## Dynamische Lokalisierung

*Dynamische Lokalisierung* sagt etwas über die Ausbreitung von Wellenpaketen unter der Zeitevolution aus, die von  $H_\omega$  induziert wird. Sei  $\phi$  eine glatte Funktion mit kompakten Träger,  $I$  ein Energieintervall und  $P_\omega(I)$  der entsprechende Spektralprojektor von  $H_\omega$ . Falls für ein  $p > 0$  der Erwartungswert

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t>0} \| |x|^p e^{-iH_\omega t} P_\omega(I) \phi(\cdot) \| \right] \quad (6.2)$$

für jedes  $\phi$  endlich ist, spricht man von dynamischer Lokalisierung.  $I$  wird Lokalisierungs-Intervall genannt. Aus  $p > 0$  folgt, daß  $e^{-iH_\omega t} P_\omega(I) \phi(\cdot)$  im Unendlichen abnehmen muß. Ansonsten wäre die Vektornorm in (6.2) nicht integrierbar. Je größer man  $p$  wählen kann, desto stärker ist die Lokalisierungseigenschaft.

Unter den Voraussetzungen, unter denen wir exponentielle Lokalisierung bewiesen haben, kann man auch dynamische Lokalisierung zeigen. Dies liegt daran, daß die Anfangsskalen-Bedingung, die wir nachweisen, uniform in der Energie ist. Siehe dazu die Diskussion der verschiedenen Varianten der Multiskalen-Analyse in Abschnitt 3.1 von Stollmanns Buch [Sto]. Dort findet man auch in Abschnitt 3.4 einen Beweis der dynamischen Lokalisierung. Weiter Quellen zu diesem Thema sind [dRJLS95, dRJLS96, BCM96, GDB98, BT99, DS99, GJ00]. Kürzlich entwickelte Verbesserungen der Multiskalen-Analyse [GK00] führen zu weiteren Verschärfung der Lokalisierungsaussagen.

## 6.2 Übertragung der Methoden auf ähnliche Fragestellungen

### Lifschitz-Tails bei indefiniten Einzelplatz-Potentialen

Wie schon mehrmals erwähnt, weiß man nichts über die Asymptotik der integrierten Zustandsdichte bei Legierungs-Modellen mit Einzelplatz-Potentialen  $u$ , die das Vorzeichen wechseln. Ein Resultat über Lifschitz-Tails würde sich hervorragend als Ergänzung zu der Wegner-Abschätzung in Theorem 2.1.12 eignen. Für den Beweis der Lokalisierung, wäre es nicht mehr nötig anzunehmen, daß der negative Anteil von  $u$  sehr klein ist.

Ein erster Schritt wäre die Untersuchung des einfachen Modells

$$u = \chi_0 - \chi_1,$$

das wir in Abschnitt 4.5.3 betrachtet haben. Selbst der eindimensionale Spezialfall

$$u = \chi_{[0,1]} - \chi_{[1,2]}$$

könnte interessante Einsichten liefern. Dabei hätte man spezielle Methoden, wie z.B. die Untersuchung der Transfermatrix, zu Verfügung.

### Wegner-Abschätzungen bei anderen Modellen

Mit den Methoden aus Kapitel 4 konnten wir eine Wegner-Abschätzung für ein Legierung-Modell beweisen, das nicht-monoton von den Kopplungskonstanten  $\omega_k$  abhängt. Dies legt die Frage nahe, ob damit auch andere Modelle untersucht werden können, die diese Eigenschaft teilen. Ein Beispiel dafür ist das „random displacement model“.

Die beiden Arbeiten [CH94, Zen99] beschäftigen sich mit einem Hybrid aus dem „random displacement model“ und dem Legierungs-Modell. Sei  $\omega_k, k \in \mathbb{Z}^d$  eine Familie von Zufallsvariablen in  $\mathbb{R}$  wie gehabt und  $\omega'_k, k \in \mathbb{Z}^d$  eine weitere Familie mit Werten in einem Würfel im Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^d$ . Der untersuchte Schrödinger-Operator hat als zufälliges Potential

$$V_{\omega, \omega'}(x) = \sum_k \omega_k u(x - k - \omega'_k), \quad \omega_k \in \mathbb{R}, \omega'_k \in \mathbb{R}^d.$$

Die Einzelplatz-Potentiale sind nicht nur mit einem zufälligen Vorfaktor versehen, sondern sind auch in zufälliger Weise von den Gitterpunkten  $k \in \mathbb{Z}^d$  verschoben. Für die Modelle, für die [CH94, Zen99] Lokalisierung zeigen, gilt allerdings

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \inf_{\omega'_k} u(x - \omega'_k) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Die zufälligen Verschiebungen können also keine Bereiche „ohne Potential“ erzeugen. Eventuell kann man diese Bedingung abschwächen, indem man die Methoden aus Kapitel 4 verwendet.

Interessanter wäre die Untersuchung des reinen „random displacement models“, bei dem die Kopplungskonstanten  $\omega_k$  fehlen.

# Literaturverzeichnis

- [Agm82] S. Agmon. *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenfunctions of  $N$ -body Schrödinger operators*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1982.
- [Aiz94] M. Aizenman. Localization at weak disorder: some elementary bounds. *Rev. Math. Phys.*, 6(5A):1163–1182, 1994. Special issue dedicated to Elliott H. Lieb.
- [AM93] M. Aizenman and S. Molchanov. Localization at large disorder and at extreme energies: an elementary derivation. *Comm. Math. Phys.*, 157(2):245–278, 1993.
- [And58] P.W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109:1492, 1958.
- [BBEE<sup>+</sup>84] V.L. Bonch-Bruевич, R. Enderlein, B. Esser, R. Keiper, A.G. Mirnov, and I.P. Zyvagin. *Elektronentheorie ungeordneter Halbleiter*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1984. Russisches Original: Moskau, Nauka, 1981.
- [BCH97] J. M. Barbaroux, J. M. Combes, and P. D. Hislop. Localization near band edges for random Schrödinger operators. *Helv. Phys. Acta*, 70(1-2):16–43, 1997. Papers honouring the 60th birthday of Klaus Hepp and of Walter Hunziker, Part II (Zürich, 1995).
- [BCM96] J.M. Barbaroux, J.M. Combes, and R. Montcho. Remarks on the relation between quantum dynamics and fractal spectra. CPT-preprint, P.3303, 1996.
- [Ber68] Berezanski. Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators. *Transl. Math. Monographs*, 17, 1968.

- [BS98] D. Buschmann and G. Stolz. Two-parameter spectral averaging and localization for non-monotoneous random Schrödinger operators. Preprint 98-617, [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc/](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/), 1998.
- [BT99] J. M. Barbaroux and S. Tcheremchantsev. Universal lower bounds for quantum diffusion. *J. Funct. Anal.*, 168(2):327–354, 1999.
- [Car82] R. Carmona. Exponential localization in one dimensional disordered systems. *Duke Math. J.*, 49:191–213, 1982.
- [Cat81] L. Cattabriga. Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients. In *Analytic solutions of partial differential equations (Trento, 1981)*, pages 129–151. Soc. Math. France, Paris, 1981.
- [CdV91] Yves Colin de Verdière. Sur les singularités de van Hove génériques. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (46):99–110, 1991. *Analyse globale et physique mathématique* (Lyon, 1989).
- [CFKS87] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Text and Monographs in Physics. Springer, Berlin, 1987.
- [CH94] J.-M. Combes and P.D. Hislop. Localization for some continuous, random Hamiltonians in d-dimensions. *J. Funct. Anal.*, 124:149–180, 1994.
- [CHM96] J. M. Combes, P. D. Hislop, and E. Mourre. Spectral averaging, perturbation of singular spectra, and localization. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(12):4883–4894, 1996.
- [CHM98] J. M. Combes, P. D. Hislop, and E. Mourre. Correlated Wegner inequalities for random Schrödinger operators. In *Advances in differential equations and mathematical physics (Atlanta, GA, 1997)*, pages 191–203. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [CL90] R. Carmona and J. Lacroix. *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [CT73] J.M. Combes and L. Thomas. Asymptotic behaviour of eigenfunctions for multiparticle Schrödinger operators. *Commun. Math. Phys.*, 34:251–270, 1973.
- [Dav95] E. B. Davies. *Spectral Theory and Differential Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [DLS85] F. Delyon, Y. Lévy, and B. Souillard. Anderson localization for multi-dimensional systems at large disorder or large energy. *Commun. Math. Phys.*, 100:463–470, 1985.
- [DMP99] T. C. Dorlas, N. Macris, and J. V. Pulé. Characterization of the spectrum of the Landau Hamiltonian with delta impurities. *Comm. Math. Phys.*, 204(2):367–396, 1999.
- [dRJLS95] R. del Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last, and B. Simon. What is localization? *Phys.Rev. Letters*, 75:117–119, 1995.
- [dRJLS96] R. del Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last, and B. Simon. Operators with singular continuous spectrum. IV. Hausdorff dimensions, rank one perturbations, and localization. *J. Anal. Math.*, 69:153–200, 1996.
- [DS99] D. Damanik and P. Stollmann. Multi-scale analysis implies strong dynamical localization. Preprint 99-461, [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc/](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/), 1999.
- [Eas73] M.S.P. Eastham. *The spectral theory of periodic differential operators*. Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.
- [ES84] A. L. Efros and B. I. Shklovski. *Electronic Properties of Doped Semi-conductors*. Springer, Berlin, 1984.
- [FHLM97] W. Fischer, T. Hupfer, H. Leschke, and P. Müller. Existence of the density of states for multi-dimensional continuum Schrödinger operators with Gaussian random potentials. *Comm. Math. Phys.*, 190(1):133–141, 1997.
- [Fis96] W. Fischer. Zur elektronischen Lokalisierung durch gaußsche zufällige potentiale. Dissertation, Naturwissenschaftliche Fakultäten der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 1996.
- [FMSS85] J. Fröhlich, F. Martinelli, E. Scoppola, and T. Spencer. Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model. *Comm. Math. Phys.*, 101(1):21–46, 1985.
- [FS83] J. Fröhlich and T. Spencer. Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy. *Commun. Math. Phys.*, 88:151–184, 1983.

- [GDB98] F. Germinet and S. De Bièvre. Dynamical localization for discrete and continuous random Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.*, 194(2):323–341, 1998.
- [GJ00] F. Germinet and S. Jitomirskaya. Strong dynamical localization for the almost mathieu model. Preprint 00-44, [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc/](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/), 2000.
- [GK00] F. Germinet and A. Klein. Bootstrap multiscale analysis and localization in random media. Preprint, [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc/](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/), 2000.
- [GMP77] I.Ya. Goldsheid, S.A. Molčanov, and L.A. Pastur. A pure point spectrum of the stochastic one-dimensional Schrödinger operator. *Functional Anal. Appl.*, 11:1–10, 1977.
- [GP90] A. Galindo and P. Pascual. *Quantum Mechanics I*. Springer, Berlin, 1990.
- [GP91] A. Galindo and P. Pascual. *Quantum Mechanics II*. Springer, Berlin, 1991.
- [GT83] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, Berlin, 1983.
- [Hem92] R. Hempel. Second order perturbations of divergence type operators with a spectral gap. In *Operator calculus and spectral theory (Lambrecht, 1991)*, pages 117–126. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [HM98] Bernard Helffer and Abderemane Mohamed. Asymptotic of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electric potential. *Duke Math. J.*, 92(1):1–60, 1998.
- [HMLW00] T. Hupfer, P. Müller, H. Leschke, and S. Warzel. Die integrierte Zustandsdichte zufälliger Schrödinger-Operatoren mit Magnetfeld. Workshop „Ungeordnete Systeme“, Oktober 2000, Ruhr-Universität Bochum, October 2000.
- [HS89] J. Helffer and J. Sjöstrand. Equation de Schrödinger avec champ magnétique et equation de Harper. In H. Holden and A. Jensen, editors, *Schrödinger Operators*, Lecture Notes in Physics, **345**, Berlin, 1989. Springer.
- [HS96] P. D. Hislop and I.M. Sigal. *Introduction to spectral theory: with Applications to Schrödinger Operators*. Springer, New York, 1996.



- [Hun00] D. Hundertmark. On the time-dependent approach to Anderson localization. *Math. Nachr.*, 214:25–38, 2000.
- [Kar97] Yu. E. Karpeshina. *Perturbation theory for the Schrödinger operator with a periodic potential*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [Kir81] W. Kirsch. über Spektren stochastischer Schrödingeroperatoren. Dissertation, Ruhr-Universität-Bochum, 1981.
- [Kir89] W. Kirsch. Random Schrödinger operators. In H. Holden and A. Jensen, editors, *Schrödinger Operators*, Lecture Notes in Physics, **345**, Berlin, 1989. Springer.
- [Kir96] W. Kirsch. Wegner estimates and Anderson localization for alloy-type potentials. *Math. Z.*, 221:507–512, 1996.
- [Kle99] F. Kleespies. Geometrische aspekte der spektraltheorie von Schrödingeroperatoren. Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt, 1999.
- [Klo93] F. Klopp. Localization for semiclassical continuous random Schrödinger operators ii: The random displacement model. *Helv. Phys. Acta*, 66:810–841, 1993.
- [Klo95a] F. Klopp. An asymptotic expansion for the density of states of a random Schrödinger operator with Bernoulli disorder. *Random Oper. and Stoch. Equ.*, 3:315–331, 1995.
- [Klo95b] F. Klopp. Localisation pour des opérateurs de Schrödinger aléatoires dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ : Un modèle semi-classique. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 45:265–316, 1995.
- [Klo95c] F. Klopp. Localization for some continuous random Schrödinger operators. *Commun. Math. Phys.*, 167:553–569, 1995.
- [Klo99] F. Klopp. Internal Lifshits tails for random perturbations of periodic Schrödinger operators. *Duke Math. J.*, 98(2):335–396, 1999. [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc) preprint : 97-81.
- [KM82a] W. Kirsch and F. Martinelli. On the density of states of Schrödinger operators with a random potential. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 15:2139–2156, 1982.

- [KM82b] W. Kirsch and F. Martinelli. On the ergodic properties of the spectrum of general random operators. *J. Reine Angew. Math.*, 334:141–156, 1982.
- [KM82c] W. Kirsch and F. Martinelli. On the spectrum of Schrödinger operators with a random potential. *Commun. Math. Phys.*, 85:329–350, 1982.
- [KM83a] W. Kirsch and F. Martinelli. Large deviations and Lifshitz singularity of the integrated density of states of random hamitonians. *Commun. Math. Phys.*, 89:27–40, 1983.
- [KM83b] W. Kirsch and F. Martinelli. On the essential selfadjointness of stochastic Schrödinger operators. *Duke Math. J.*, 50:1255–1260, 1983.
- [KR00] F. Klopp and J. Ralston. Endpoints of the spectrum of periodic operators are generically simple. Preprint [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc), 2000.
- [KS80] H. Kunz and B. Souillard. Sur le spectre des opérateur aux différence finies aléatoires. *Commun. Math. Phys.*, 78:201–246, 1980.
- [KS85] W. Kirsch and B. Simon. Universal lower bounds of eigenvalue splittings for one dimensional Schrödinger operators. *Commun. Math. Phys.*, 97:453–460, 1985.
- [KS86] W. Kirsch and B. Simon. Lifshitz tails for periodic plus random potentials. *J. Stat. Phys.*, 42:799–808, 1986.
- [KS87] W. Kirsch and B. Simon. Comparision theorems for the gap of Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 75:396–410, 1987.
- [KoS87] S. Kotani and B. Simon. Localization in general one-dimensional random systems II: continuum Schrödinger operators. *Commun. Math. Phys.*, 112:103–119, 1987.
- [KS99] F. Kleespies and P. Stollmann. Lifshitz asymptotics and localisation for random quantum waveguides. eingereicht bei *Rev.Math.Phys.*, 1999.
- [KSS97] W. Kirsch, P. Stollmann, and G. Stolz. Anderson localization for random Schrödinger operators with long range interactions. preprint, [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc) : 97-72, 1997.

- [KSS98a] W. Kirsch, P. Stollmann, and G. Stolz. Anderson localization for random Schrödinger operators with long range interactions. *Comm. Math. Phys.*, 195(3):495–507, 1998.
- [KSS98b] W. Kirsch, P. Stollmann, and G. Stolz. Localization for random perturbations of periodic Schrödinger operators. *Random Oper. Stochastic Equations*, 6(3):241–268, 1998. Preprint 96-409, [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc).
- [KW00] F. Klopp and T. Wolff. Internal Lifshitz tails for random Schrödinger operators. Preprint, [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc), 2000.
- [LGP88] I. M. Lifshitz, S. A. Gredeskul, and L. A. Pastur. *Introduction to the Theory of Disordered Systems*. Wiley, New York, 1988. Russian original: Nauka, Moscow, 1982.
- [Lif85] Lifshitz Memorial Issue. *J. Statist. Phys.*, 38(1-2), 1985.
- [Mat71] J. N. Mather. On Nirenberg’s proof of Malgrange’s preparation theorem. In *Proceedings of Liverpool Singularities—Symposium, I (1969/70)*, pages 116–120. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 192, Berlin, 1971. Springer.
- [Mez93] G. A. Mezincescu. Internal Lifshitz singularities for one dimensional Schrödinger operators. *Commun. Math. Phys.*, 158:315–325, 1993.
- [MH84] F. Martinelli and H. Holden. On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on  $L^2(R^\nu)$ . *Commun. Math. Phys.*, 93:197–217, 1984.
- [Mül00] P. Müller. Anderson lokalisierung: Physikalische Grundlagen und mathematische Methoden. Workshop „Ungeordnete Systeme“, Oktober 2000, Ruhr-Universität Bochum, October 2000.
- [Mol81] S.A. Molčanov. The local structure of the spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator. *Commun. Math. Phys.*, 78:429–446, 1981.
- [MS85] F. Martinelli and E. Scoppola. Remark on the absence of absolutely continuous spectrum for  $d$ -dimensional Schrödinger operators with random potential for large disorder or low energy. *Comm. Math. Phys.*, 97(3):465–471, 1985.

- [Naj] H. Najjar. Asymptotique de la densité d'états intégrée des modèles aléatoires continus. thesis Université Paris 13, in Vorbereitung.
- [Pas80] L. A. Pastur. Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation. *Commun. Math. Phys.*, 75:179–196, 1980.
- [PF92] L. A. Pastur and A. L. Figotin. *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II, Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, San Diego, 1975.
- [RS78] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics IV, Analysis of Operators*. Academic Press, San Diego, 1978.
- [RS79] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics III, Scattering Theory*. Academic Press, San Diego, 1979.
- [RS80] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I, Functional Analysis*. Academic Press, San Diego, 2nd rev. edition, 1980.
- [She98] Z. Shen. On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators. Erwin Schrödinger Institut, Preprint ESI 597, September 1998.
- [Shu79] M. A. Shubin. Spectral theory and index of elliptic operators with almost-periodic coefficients. *Russ. Math. Surveys*, 34:109–157, 1979.
- [Sim71] B. Simon. *Quantum mechanics for Hamiltonians defined as quadratic forms*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1971. Princeton Series in Physics.
- [Sim79] B. Simon. *Trace Ideals and their Applications*. London Mathematical Society Lecture Note Series. 35. Cambridge University Press, Cambridge, 1979.
- [Sim82] B. Simon. Schrödinger semigroups. *Bull. Am. Math. Soc.*, 7:447–526, 1982.
- [Sim85] B. Simon. Lifshitz tails for the anderson model. *J. Stat. Phys.*, 38:65–76, 1985.

- [Sim87] B. Simon. Internal lifshitz tails. *J. Stat. Phys.*, 125:113–125, 1987.
- [Sjö91] J. Sjöstrand. Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions. In *Microlocal analysis and applications*, volume **1495** of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [Skr87] M. M. Skriganov. Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*, 2, 1987.
- [Skr84] M. M. Skriganov. Structure of the spectrum of the multidimensional Schrödinger operator with a periodic potential. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 262:846–850, 84.
- [Slo97] V. A. Sloushch. The discrete spectrum in the spectral gaps of a selfadjoint operator under unbounded perturbations. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 247(Issled. po Linein. Oper. i Teor. Funkts. 25):237–241, 303, 1997.
- [Spe86] T. Spencer. The Schrödinger equation with a random potential: A mathematical review. In K. Osterwaler and R. Stora, editors, *Critical Phenomena, random systems, gauge theories*, pages 895–944. North-Holland, Amsterdam, New York, 1986.
- [Spe88] T. Spencer. Localization for random and almost-periodic potentials. *J. Stat. Phys.*, 51:1009–1017, 1988.
- [Sto] P. Stollmann. *Caught by disorder: lectures on bound states in random media*. erscheint bei Birkhäuser.
- [Stz99] G. Stolz. Non-monotoneous random Schrödinger operators: The Anderson Model. Preprint 99-259, [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc/](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/), 1999.
- [Sto00] P. Stollmann. Wegner estimates and localization for continuum Anderson models with some singular distributions. erscheint in *Archiv der Mathematik*, 2000.
- [Sus00] T. Suslina. Absolute conutnuity of the spectrum of periodic operators of mathematical physics. Preprint, Journées Équations aux dérivées partielles, Nantes, June 2000.

- [SW86] B. Simon and T. Wolff. Singular continuous spectrum under rank one perturbations and localization for random Hamiltonians. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39:75–90, 1986.
- [vD87] H. von Dreifus. On the effect of randomness in ferromagnetic models and Schrödinger operators. Dissertation, New York University, 1987.
- [vDK89] H. von Dreifus and A. Klein. A new proof of localization in the Anderson tight binding model. *Commun. Math. Phys.*, 124:285–299, 1989.
- [vDK91] H. von Dreifus and A. Klein. Localization for random Schrödinger operators with correlated potentials. *Commun. Math. Phys.*, 140:133–147, 1991.
- [Ves96] I. Veselić. Lokalisierung bei zufällig gestörten periodischen Schrödingeroperatoren in Dimension Eins. Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, 1996.
- [Ves98] I. Veselić. Localisation for random perturbations of periodic Schrödinger operators with regular Floquet eigenvalues. Preprint 98-569, [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc), 1998.
- [Ves00] I. Veselić. Wegner estimate for some indefinite anderson-type Schrödinger operators with differentiable densities. Preprint, [http://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc/](http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/), September 2000.
- [Weg81] F. Wegner. Bounds on the DOS in disordered systems. *Z. Phys. B*, 44:9–15, 1981.
- [Wei76] J. Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1976. Mathematische Leitfäden.
- [Wei80] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*. Springer-Verlag, New York, 1980. Aus dem Deutschen übersetzt von Joseph Szücs.
- [Wer95] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, 1995.
- [Yos95] K. Yosida. *Functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [Zen99] H. Zenk. Anderson localization for a multidimensional model including long range potentials and displacements. Preprint-Reihe des Fachbereichs Mathematik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 1999.

# Symbol- und Stichwortverzeichnis

- $\langle x \rangle$ , 52  
 $(u, f)$ , 12  
 $A$ -beschränkt, 15  
 $A$ -beschränkt mit relativer Schranke  
      $a$ , *siehe*  $A$ -beschränkt  
 $C^k$ , 14  
 $C_0^\infty$ , 14  
 $C_W$ , 28  
 $C_{\text{Tr}}$ , 28  
 $E_n(\theta)$ , 49  
 $H(\theta)$ , 49  
 $H^{L,D}$ , 17  
 $H^{L,N}$ , 17  
 $H^{L,\text{per}}$ , 17  
 $H_0$ , 11, 22  
 $H_\omega^l$ , 27  
 $H_\omega$ , 11  
 $H_{l,\omega}$ , *siehe*  $H_{L,\omega}$   
 $H_{L,\omega}$ , 56, 119  
 $H_{L,\omega}(\theta)$ , 67  
 $L_{\text{loc}}^p$ , 14  
 $N_{L,\omega}$ , 56, 64  
 $N_{L,\omega}(\theta)$ , 56  
 $P_\omega^l$ , 27  
 $P_\omega^{L,D}$ , 18  
 $V_0$ , 11, 22  
 $V_\omega$ , 11  
 $W^{1,1}(\mathbb{R})$ , 23, 28, 88  
 $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ , 14  
 $W_{\text{per}}^{2,2}$ , 16, 49  
 $[0, 1[^d$ , 23, 76, 118  
 $[x]$ , 14  
 $[x]_2$ , 14  
 $\Delta$ -beschränkt, *siehe*  $A$ -beschränkt  
 $\mathbb{E}$ , 27  
 $\Gamma$ , 23  
 $\Lambda$ , 13  
 $\Lambda + x$ , 13  
 $\Lambda_L$ , 13, 22  
 $\Lambda_l \rightarrow \mathbb{R}^d$ , *siehe* thermodynamischer  
     Limes  
 Lin, 14  
 $\Omega$ , 11  
 $\Omega_{l,h}$ , 119  
 $\mathbb{P}$ , 11  
 Tr, 27  
 $\mathbb{Z}^d$ -periodisches Potential, *siehe* pe-  
     riodisches Potential  
 $\alpha$ , 23, 84  
 $\alpha^*$ , 23, 24, 29  
 $\mathcal{H}$ , 14  
 $\chi^L$ , 13, 57  
 $\chi_0$ , 23, 76, 77, 79  
 $\chi_k$ , 13  
 $\mu$ , 11, 22  
 $|\cdot|$  Lebesguemaß, 18  
 $|\cdot|$ , 14  
 $\|\cdot\|$ , 15  
 $\|\cdot\|_n$ , 53  
 $\|f\|_n$ , *siehe*  $\|\cdot\|_n$

- $\sigma_c$ , 18, 25  
 $\sigma_{pp}$ , 18, 25  
 $\tilde{\Lambda}$ , 13, 86  
 $\tau$ , 24, 118  
 $\theta_0$ , 50  
 $\tilde{H}_\eta^l$ , 86  
 $\tilde{f}(x, y)$ , 52  
 $c_+, c_-$ , 110  
 $d$ , *siehe* Raumdimension  
 $f$ , *siehe* Dichte  
 $h_0$ , 12  
 $h_\omega$ , 12  
 $m_1, m_2$ , 111  
 $p(d)$ , 15  
 $s(x, y)$ , *siehe* Abschneidefunktion  
 $v_\omega$ , 12  
 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  Borel-Mengen auf  $\mathbb{R}$ , 22  
 Abfall der Dichte an ihren Rändern, 24  
 Abschneidefunktion, 52  
 absolutstetiges Spektrum, 10, 18, 49  
 Anderson-artige Modelle, 12  
 Anderson-Lokalisierung, 7, 10, 40  
 Anderson-Modell, 12  
 Anfangsskalen-Abschätzung, *siehe* Anfangsskalen-Bedingung  
 Anfangsskalen-Bedingung, 27, 32, 33, 44, 109  
 Approximations-Lemma, 51, 56  
 Asymptotik der integrierten Zustandsdichte, 19  
 Band, *siehe* spektrales Band  
 Bandkante, 22  
 Čebyšev-Ungleichung, 28, 67, 76  
 charakteristische Funktion, 13, 22, 23  
 Combes-Thomas Abschätzung, 30, 33, 58  
 Combes-Thomas Argument, *siehe* Combes-Thomas Abschätzung  
 Definitionsbereich, 14, 16  
 Dichte, 11, 92  
 differenzierbare Dichte, 23, 88  
 direkte Integralzerlegung, 48  
 Dirichlet-Eigenfunktionen, 47  
 Dirichlet-Neumann-Bracketing, 79, 116  
 Dirichlet-Randbedingungen, 16, 27  
 diskreter Laplace-Operator, 12, 29  
 duales Gitter, 48  
 dynamische Lokalisierung, 40, 123  
 Ein-Elektron-Näherung, 9  
 Einschränkung auf einen Würfel, *siehe* Randbedingungen  
 Einzelplatz-Potential, 11, 22  
 Einzelplatz-Potential mit verallgemeinerter Treppenform, 88, 120  
 Ergodizität, 18  
 erster Neumann-Eigenwert, *siehe* unterster Neumann-Eigenwert  
 Exponent des Abfalls, 32  
 exponentielle Lokalisierung, *siehe* Anderson-Lokalisierung  
 exponentieller Abfall, 25, 40, 71  
 Faltungsvektor, 23, 84  
 fast analytische Fortsetzung, 52, 63  
 fast sicheres Spektrum, 18, 25  
 Floquet-Eigenwerte, 49  
 Floquet-regulär, 22, 41, 50  
 Floquet-reguläre spektrale Kante, *siehe* Floquet-regulär  
 Floquet-Zerlegung, 48, 49, 119  
 Funktionalkalkül, 52  
 Funktionenräume, 14  
 Gaußsches Feld als Potential, 42  
 gemeinsame Dichte, 71, 84, 85



- generisches Phänomen, 26  
 geometrische Resolventen-Formel, 33  
 geometrische Resolventen-Ungleichung, 33  
 Gleichverteilung, 29, 88, 92  
 Gradient, 14, 33  
 Greenschen Funktion, 30  
 Große Abweichungen, 110, 115  
 Helffer-Sjöstrand Formel, 51, 58  
 Hesse-Matrix, 22, 50  
 Hilbertraum, 14  
 indefinites Legierungs-Modell, 27, 109  
 indefinites Potential, 23, 48  
 indefinites Problem, 7, 47  
 Infimum des Spektrums, 40, 44, 109  
 infinitesimal beschränkt, 15, 49, 56  
 Inklusion des Spektrums, 118  
 innere spektrale Kante, 25, 41, 46, 118  
 innerer spektraler Rand, *siehe* innere spektrale Kante  
 integrierte Zustandsdichte, 18, 76  
 integrierte Zustandsdichte auf einem endlichen Würfel, 18  
 Kantenlänge, 13, 16, 39, 71  
 Kato-Rellich Theorem, 15  
 kleiner negativer Anteil, 110  
 Komplement, 31  
 konkurrierende Längenskalen, 45  
 Koordinatentransformation, 84, 86  
 Kopplungskonstanten, 11, 22, 84  
 korrelierte Kopplungskonstanten, 71  
 Längenskala, *siehe* Kantenlänge  
 Laplace-Operator, 14  
 Large Deviations, *siehe* Große Abweichungen  
 Legierungs-Modell, 11  
 Legierungs-Potential, 11  
 Lifschitz Asymptotik, *siehe* Lifschitz-Tails  
 Lifschitz-Singularitäten, *siehe* Lifschitz-Tails  
 Lifschitz-Tails, 41, 44, 66, 123  
 linear im Volumen, 28  
 Lipschitz-stetig, 19, 28, 42, 49, 68  
 Literaturhinweise, 7  
 Lokalisations-Zentrum, 72, 73  
 Lokalisierung an inneren spektralen Rändern, 25  
 Lokalisierungs-Intervall, 25, 123  
 Marginaldichte, 85  
 Masse des exponentiellen Abfalls, *siehe* Exponent des Abfalls  
 Min-Max-Prinzip, 17, 77, 120, 122  
 Modelle vom Anderson-Typ, *siehe* Anderson-artige Modelle  
 modifizierte Multiskalen-Analyse, 43, 106, 121  
 monoton, 77, 86, 124  
 Multiplikations-Operator, 15  
 Multiskalen-Analyse, 30, 40, 71, 74, 93  
 Multiskalen-Technik, *siehe* Multiskalen-Analyse  
 Neumann-Flächen, 46, 116  
 Neumann-Randbedingungen, 16, 27  
 nicht-resonant, *siehe* Resonanz  
 periodische Approximation, 56, 119  
 periodische Näherung, *siehe* periodischen Approximation  
 periodische Randbedingungen, 16, 27, 110, 118  
 periodisches Potential, 22, 48  
 Perturbation von Bandkanten, 12, 25, 26

- Punktspektrum, 25  
 quadratintegrierbar, 14  
 Quasi-Impuls, 48  
 Randbedingungen, 16, 27, 32  
 Randbedingungen für Operatoren in  $l^2$ , 17  
 random displacement model, 11, 124  
 Raumdimension, 15, 22, 25, 42  
 regulärer Floquet-Eigenwert, 50  
 relative Schranke, *siehe*  $A$ -beschränkt  
 Resonanz, 36, 72–75  
 Restriktion auf einen Würfel, *siehe* Randbedingungen  
 schwache Wegner-Abschätzung, 28, 32  
 Seitenlänge, *siehe* Kantenlänge  
 selbstmittelnd, 18  
 Selbstmittelung, *siehe* selbstmittelnd  
 seltene Konfigurationen, 110  
 semidefinites Potential, 22  
 Sobolevraum, 14  
 Spaltensummennorm, 84, 89–91  
 spektrale Kante, 21, 49  
 spektrale Lücke, 22, 49, 57  
 spektrale Mittelung, 81, 82, 86, 89, 91  
 spektraler Rand, *siehe* spektrale Kante  
 spektrales Band, 49  
 Spektralprojektor, 18, 27  
 Spektralsatz, 79, 81  
 Spiegelsymmetrie, 24, 72, 111  
 Spline, 53  
 Spur, 27, 80  
 Spurklasse, 58  
 stetiges Spektrum, 18  
 Stones Formel, 81, 82  
 thermodynamischer Limes, 18, 46, 106  
 tiefster Neumann-Eigenwert, *siehe* unterster Neumann-Eigenwert  
 Toeplitz-Matrix, 84  
 Translation, 48, 58  
 treppenförmiges Einzelplatz-Potential, 23, 88  
 trunkierte Matrix, 85  
 Umindizierung, 24  
 Umskalierung, 23, 24  
 unabhängig, identisch verteilt, 22, 29, 57, 86  
 Ungleichung von Temple, 111  
 unterster Neumann-Eigenwert, 45, 110  
 Vektornorm, 14  
 verallgemeinerte Lifschitz-Tails, 25, 66  
 Volumen-Abhängigkeit, 76  
 Vorzeichenwechsel, 23, 71  
 Würfel im  $\mathbb{R}^d$ , 13  
 Wahrscheinlichkeitsraum, 11, 22  
 Wegner-Abschätzung, 21, 28, 40, 75, 124  
 Wegner-Konstante, 28  
 Zerlegung in kleinere Würfel, 116  
 zufällige Kopplungskonstanten, *siehe* Kopplungskonstanten  
 Zustandsdichte, 19, 21, 28, 42, 107  
 zweiter Neumann-Eigenwert, 112

## Danksagung

Am Schluß dieser Arbeit möchte ich allen danken, die meine Studienjahre in Bochum zu einer wissenschaftlich fruchtbaren und angenehmen Zeit gemacht haben.

An erster Stelle gilt mein Dank Professor Dr. Werner Kirsch, der mich schon über die Diplomarbeit in das überaus interessante Thema der zufälligen Schrödinger-Operatoren einführte. Ich profitierte durch die rege wissenschaftliche Atmosphäre in seiner Arbeitsgruppe, die vielen Gastvorträge, sowie die Auslandsaufenthalte und Konferenzbesuche, die durch seine Initiative und Förderung zustande kamen. Ganz besonders danke ich ihm für die vielen Ratschläge und Diskussionen, mit denen er diese Arbeit über die Jahre unterstützte und begleitete.

Zu großem Dank bin ich auch Professor Dr. Frédéric Klopp verpflichtet: für die Gastfreundschaft an der Université Paris 13, für zahlreiche Diskussionen und Erläuterungen zu seiner Arbeit über Lifschitz-Tails und deren Anwendbarkeit auf das Lokalisierungs-Problem. Die Bereitschaft meines Vaters Professor Dr. Krešimir Veselić zu vielen Diskussionen, auch über mathematische Gebiete, die ihm fremd waren, unterstützte mich von Anfang des Studiums bis zur Fertigstellung dieser Arbeit.

Professor Dr. Holger Dette und Professor Dr. Volker Enß danke ich für die prompte Bereitschaft, die Begutachtung der Arbeit zu übernehmen.

Den gegenwärtigen und vielen ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppe „Mathematische Physik“ danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre, für viele anregende Gespräche über Schrödinger-Operatoren und andere mathematische Themen und für zahlreiche Verbesserungsvorschläge zu dieser Arbeit. Dieser Dank richtet sich an Dr. Eckhard Giere, Pedro Goncalves, Dr. Dirk Hundertmark, Dr. Almut Kutzelnigg, Ralf Muno, Dr. Jörg Obermeit, Christiane Riebling, Dr. Henrich Storck, Marco Schmidt und vor allem an meinen langjährigen Kollegen Stefan Böcker. Stefan Wiegand danke ich dafür, daß er das Computernetz unserer Arbeitsgruppe trotz meiner Anwesenheit exzellent in Gang gehalten hat. Ein herzliches Dankeschön an Frau Ingeborg Beyer und Frau Isolde Gottschlich für die administrative Arbeit, die sie übernommen haben.

Bei Thomas Hupfer und Simone Warzel möchte ich mich für überaus präzise Korrekturhinweise und Verbesserungsvorschläge bedanken.

In Diskussionen mit Professor Dr. Johannes Brasche, Ayham Chahrour, Dr. Martin Janssen, Dr. Brice Franke, Professor Dr. Witold Karwowski, Dr. Alexei Kolesnikov, Dr. Aliosha Khorunji, Professor Dr. Maddaly Krishna, Dr. Daniel Lenz, Hatem Najar, Dr. Norbert Peyerimhoff, Professor Dr. Georgi D. Rai-

kov, Firas Rassoul Agha, Professor Dr. Jan Philip Solovej, Professor Dr. Peter Stollmann, Dr. Anton Thalmaier und Alexander Tschersich konnte ich viel über verschiedene mathematische und physikalische Aspekte von Schrödinger-Operatoren lernen. Professor Dr. Leonid Pastur lenkte mein Interesse auf den Artikel [FHLM97], von dem Teile dieser Arbeit inspiriert sind. Professor Dr. Peter Stollmann stellte eine Vorabversion seines Buches über die mathematische Theorie der Anderson-Lokalisierung zu Verfügung. Allen diesen Personen danke ich herzlich.

Dem Sonderforschungsbereich 237 danke ich für die finanzielle Unterstützung, die mir während des Promotionsstudiums gewährt wurde. Ebenso gebührt Dank verschiedenen Personen und Institutionen, welche mir in dieser Zeit Forschungsreisen ermöglichten: Professor Dr. Sergio Albeverio, Dr. Astrid Hilbert, Professor Dr. Helge Holden, Professor Dr. Leonid Pastur, Professor Dr. Lars-Erik Persson und Professor Dr. Jan Philip Solovej, sowie dem DAAD, der Ruth- und Gert-Massenberg-Stiftung und dem MaPhySto-Zentrum in Aarhus.

Einen wesentlichen Beitrag zu meinem Studium haben mir meine Hochschullehrer gegeben, von denen ich stellvertretend Professor Dr. Reinhold Böhme, der inzwischen verstorben ist, und Professor Dr. Günter Ewald erwähnen möchte, bei welchen ich die Einführungsvorlesungen hörte.

Zu guter Letzt danke ich meinen Eltern und meiner Schwester für die geduldige Unterstützung in all den Studienjahren.

## Lebenslauf von Ivan Veselić

6.6.1973	geboren in Zagreb als Sohn der Eheleute Krešimir Veselić und Djurdjica geb. Kovač
1976	Umzug nach Deutschland
1980-1984	Langeloh-Grundschule in Dortmund-Löttringhausen und Anke-Butorac-Grundschule in Osijek
1984-1990	Stadtgymnasium Dortmund
1990-1991	Rockbrook-Park School in Dublin
1991	Leaving Certificate Examination (irische Hochschulreifepfung)
1991-1997	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Ruhr-Universität Bochum
Oktober 1993	Vordiplom in Mathematik
Februar 1997	Diplom in Mathematik
Seit April 1997	Doktorand an der Fakultät für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum in der Arbeitsgruppe „Mathematische Physik“ von Professor Dr. W. Kirsch
April 1997 - April 1998	Wissenschaftliche Hilfskraft an der Fakultät für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum
Seit April 1998	Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Sonderforschungsbereich 237 „Unordnung und große Fluktuationen“