Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 25.06.2014

Höhere Mathematik II (P/MP/ET/IT/IKT/I-I)

12. Übungsblatt

Abgabetermin: 03.07.2014, 12:00

Aufgabe 1

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{g}(x,y) = \big(\exp(xy) + xy\exp(xy),\ x^2\exp(xy) - 2y\big)\,.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der notwendigen und der hinreichenden Bedingung, dass $\vec{g}$ ein Potential besitzt.

b) Berechnen Sie ein Potential F.

c) Berechnen Sie für die Kurve C mit der Parametrisierung

$$\vec{c} : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{c}(t) = \left(\frac{4+t}{4+4t},\ \log\left(t^2 - t + 2\right)\right)$$

das Kurvenintegral

$$\int_C \vec{g}\, d\vec{x}.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie ein Potential des Gradientenfeldes $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{g}(x,y,z) = \Big(2xy\cos(yx^2) + \sin(x - z^2) - \tfrac{1}{x},\ x^2\cos(yx^2) - \tfrac{1}{y},\ -2z\sin(x - z^2) + \tfrac{2}{z}\Big)\,.$$

Aufgabe 3

a) Sei $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = 8x,\ 0 < y < 4,\ 0 < z < 3\}$.

Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Fläche F und berechnen Sie das skalare Oberflächenintegral $\int_F h\ dS$ für $h(x,y,z) = yz$.

b) Gegeben sei der Zylinder mit Radius 4 und Höhe 5, dessen Boden in der xy–Ebene liegt. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{w}(x,y,z) = (y, x, xz)$ durch den Teil der Mantelfläche (ohne Deckel und Boden), der im ersten Oktanten liegt (d.h. $x,y,z \geq 0$).

Aufgabe 4 (Mercator–Projektion der Einheitssphäre)
Die Sphäre ohne Nord– und Südpol besitzt die Parametrisierung $\vec{\phi} : [-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\vec{\phi}(u, v) = \frac{1}{\cosh v} (\cos u, \sin u, \sinh v) \,.$$

a) Berechnen Sie $\vec{\phi}_u$ und $\vec{\phi}_v$ und zeigen Sie, dass $\vec{\phi}$ winkeltreu ist, d.h. dass gilt:

$$E = G \quad \text{und} \quad F = 0$$

(vgl. 19.17 (iii).

b) Berechnen Sie die Kugeloberfläche mit Hilfe obiger Parametrisierung.