TU Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Sommersemester 2014

08.04.2014

Angewandte Harmonische Analysis

1. Übungsblatt

Abgabetermin: 14.04.2014, 11:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 1 Ein- und zweiseitige Exponentialfunktionen

Für $a > 0$ definieren wir die einseitige Exponentialfunktion über die Vorschrift

$$f_a(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $f_a * f_b$ (mit $a, b > 0$) sowie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f_a * f_b)$.

b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ der zweiseitigen Exponentialfunktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

Aufgabe 2 Eine Anwendung der Parseval-Identität

Gegeben sei die Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ mit

$$\phi(t) = \chi_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\hat{\phi}$ von ϕ.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Parseval-Identität den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2}\, dy.$$

Aufgabe 3 Rechenregeln der Fouriertransformierten

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformierten:

a) Ableitungsformel im Zeit-Bereich: $\mathcal{F}[f^{(p)}(t)](\omega) = (2\pi i\omega)^p \hat{f}(\omega)$,

b) Ableitungsformel im Frequenz-Bereich: $\mathcal{F}[(-2\pi it)^p f(t)](\omega) = \hat{f}^{(p)}(\omega)$.