TU Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Sommersemester 2014

14.04.2014

Angewandte Harmonische Analysis

2. Übungsblatt

Abgabetermin: 24.04.2014, 16:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 4 Poissonsche Summenformel

a) Formulieren Sie den Beweis von Korollar 2.38 aus.

b) Geben Sie mindestens ein weiteres Kriterium zur punktweisen Konvergenz von Fourierreihen an und verwenden Sie dieses zu einer weiteren Formulierung der Poissonschen Summenformel.

Aufgabe 5 Anwendungen der Poissonschen Summenformel

a) Überprüfen Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ die Voraussetzungen der Poissonschen Summenformel erfüllt und beweisen Sie mit Hilfe der Formel die Identität

$$\frac{1}{\sin^2 y} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (y + k\pi)^{-2}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

b) Welche Summenformel ergibt sich aus a) für $\cot(y)$?

Aufgabe 6 Zusammenhang zwischen PSF und Interpolation

Gegeben seien $f \in C_c(\mathbb{R})$ (supp(f) kompakt) mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ sowie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$h(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)e^{-2\pi ik\omega}$$

und $h \neq 0$ auf $\mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, warum die Reihe $g(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\omega+k)$ fast überall konvergiert und weisen Sie anschließend nach, dass die Funktion Λ mit $\hat{\Lambda} = \hat{f}/h$ die Eigenschaft $\hat{\Lambda} \in L^1(\mathbb{R})$ erfüllt.

b) Die Funktion g sei von beschränkter Variation. Zeigen Sie, dass Λ aus a) die kardinale Lagrange-Eigenschaft

$$\Lambda(j) \quad = \delta_{0,j}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

erfüllt.

Aufgabe 7 Diskrete Fourierkoeffizienten
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei 1-periodisch, die Folge ihrer Fourierkoeffizienten $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $c_k(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}\, dt$ sei absolut summierbar.

a) Zeigen Sie, dass für die diskreten Fourierkoeffizienten zur Schrittweite $h = 1/n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) die folgende Identität gilt:

$$\alpha_k(f) \quad = \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_{k+\ell n}(f)\,.$$

b) Geben Sie eine geeignete Fehlerabschätzung für $|c_k(f) - \alpha_k(f)|$ im Bereich $|k| \leq n/2$ für den Fall $f \in C^r$ $(r \in \mathbb{N})$ an.

Aufgabe 8 Faltungssatz der diskreten Fouriertransformation
Überprüfen Sie die Aussage des Faltungssatzes der diskreten Fouriertransformation anhand der konkreten n-periodischen Folgen $(y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ und $(z_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ mit

$$y_j \quad = \quad \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \text{ mod } n \\ -1, & j \equiv 1 \text{ mod } n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $z_j = j$ für $0 \leq j \leq n-1$. Stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar. Verwenden Sie hierzu $n = 128$ und die Matlab-Routinen `fft`, `ifft` und `fftshift`.