TU Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Sommersemester 2014

28.04.2014

Angewandte Harmonische Analysis

3. Übungsblatt

Abgabetermin: 05.05.2014, 10:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 9 Diskrete Kosinus-Transformation
Gegeben sei ein reelles Signal $y \in S_m$, $m \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass die Inverse der (mit dem Faktor $m/2$ normalisierten) diskreten Kosinus-Transformation vom Typ II (DCT-II), welche definiert ist über

$$\hat{y}_k = \frac{2}{m} \sum_{j=0}^{m-1} y_j \cos \frac{k(2j+1)\pi}{2m}, \quad 0 \leq k \leq m-1,$$

gegeben ist durch die diskrete Kosinus-Transformation vom Typ III:

$$y_j = \frac{\hat{y}_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \hat{y}_k \cos \frac{k(2j+1)\pi}{2m}, \quad 0 \leq j \leq m-1.$$

b) Für $y = (\ldots, y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}, \ldots) \in S_m$ definieren wir $z \in S_{4m}$ durch

$$(z_0, z_1, \ldots, z_{4m-1}) = (0, y_0, 0, y_1, 0, \ldots, y_{m-2}, 0, y_{m-1}, 0, y_{m-1}, 0, y_{m-2}, \ldots, 0, y_1, 0, y_0).$$

Stellen Sie eine Beziehung zwischen den DCT-II-Koeffizienten $\hat{y}_k$ und den diskreten Fourierkoeffizienten $\hat{z}_{2k}$ her.

Aufgabe 10 Elementare Eigenschaften der Kovarianzmatrix
Die Matrix R bezeichne wieder die Kovarianzmatrix aus der Vorlesung.

a) Zeigen Sie, dass für einen Vektor $c \in \mathbb{C}^n$ genau dann die Identität $c^* R c = 0$ gilt, wenn

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j Y_j = 0 \right) = 1.$$

Anmerkung: Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass R genau dann nicht invertierbar ist, wenn der Zufallsvektor $(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ linear abhängig ist.

b) Weisen Sie die Identität $\sum_k \hat{r}_k = n r_0$ sowohl mit Methoden der Linearen Algebra (Stichwort: Ähnlichkeit) als auch über Methoden der Stochastik (Unkorreliertheit) nach.

Aufgabe 11 Cramér-Zerlegung
Ein schwach stationärer Zufallsvektor $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ beschreibt ein *weißes Rauschen* mit Varianz σ^2, wenn $\mathbb{E}(Y_j) = 0$ und $\mathbb{E}(Y_j \overline{Y}_{j+k}) = \delta_k \sigma^2$ gilt.

a) Weisen Sie nach, dass die Komponenten $\hat{Y}_k$ der Cramér-Zerlegung ebenfalls ein weißes Rauschen beschreiben.

b) Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix zum Vektor $(\hat{Y}_0, \ldots, \hat{Y}_{n-1})$.

Aufgabe 12 Programmieraufgabe zum Power-Spektrum

a) Vergleichen Sie das Power-Spektrum des weißen Rauschens, das Sie einmal mit der `Matlab`-Funktion `randn` und einmal mit der Funktion `powernoise`, welche auf der Veranstaltungswebsite hinterlegt ist, erzeugen. Verwenden Sie dabei jeweils $n = 2^\ell$ mit $\ell = 6, 8, 10$.

b) Berechnen Sie mit `Matlab` die inverse Fouriertransformation (a_j) der $2n$-periodischen Folge $(\hat{a}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\hat{a}_k \quad = \quad (1 - |k|)^{-1} \qquad -n \leq k \leq n-1\,.$$

Vergleichen Sie anschließend das Power-Spektrum des *rosa Rauschens* vom Typ $1/f$, das Sie einerseits durch Faltung des weißen Rauschens (`randn`) mit der Folge (a_j) erzielen und andererseits mit Hilfe der Funktion `powernoise`. Verwenden Sie n wie in Aufgabenteil a).