TU Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Sommersemester 2014

06.05.2014

Angewandte Harmonische Analysis

4. Übungsblatt

Abgabetermin: 12.05.2014, 10:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 13 Zum ersten trigonometrischen Moment
Die (periodische) Funktion $f \in L_2(0,1)$, $f \not\equiv 0$, habe die Fourierkoeffizienten

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi ikt}\, dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Beweisen Sie, dass das 1. trigonometrische Moment $\tau^*(f) = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_0^1 e^{2\pi it} |f(t)|^2\, dt$ die Darstellung mit Hilfe der Fourierkoeffizienten

$$\tau^*(f) = \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \overline{c_{k+1}(f)}}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2}$$

besitzt. Zeigen Sie damit, dass $|\tau^*(f)| < 1$ für jedes $f \in L_2(0,1)$ gilt und geben Sie eine neue Darstellung der Varianz des Arguments von f mit Hilfe der Fourierkoeffizienten an.

Aufgabe 14 Zur Breitenbergerschen Unschärferelation
Die Fourierkoeffizienten der *geraden* 1-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1 - 2t$ im Intervall $[0, 1/2]$ lauten

$$c_k(f) \;=\; \begin{cases} 1/2, & k = 0, \\ 2/(k\pi)^2, & k \in \mathbb{Z}\,\text{ungerade}, \\ 0, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,\text{gerade}. \end{cases}$$

Skizzieren Sie f (mehrere Perioden) und berechnen Sie die beiden Parameter τ^*, ω^* sowie die Varianzen und das Produkt in der Unschärferelation nach Breitenberger.

Aufgabe 15 Zur Heisenbergschen Unschärferelation

a) Die Funktion g erfülle die Voraussetzungen aus Definition 4.1. Wir definieren mit $a > 0$ die Funktionen g_a durch $g_a(t) = g(at)$. Bestimmen Sie, wie sich die Parameter aus Definition 4.1 durch die Skalierung ergeben.

b) Die Gauß-Funktion g sei gegeben durch die Vorschrift $g(t) = e^{-\pi t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Zeit- und Frequenz-Zentren sowie die entsprechende Varianz und das Produkt in der Heisenbergschen Unschärferelation.

Aufgabe 16 Anwendungen der Time-Frequency Toolbox
Die Programme `loctime` und `locfreq` der Time-Frequency Toolbox bestimmen die Zeit- und Frequenz-Zentren sowie die Standardabweichung in Definition 4.1.
Bestimmen Sie die Werte für verschiedene Signale der Längen $N = 16, 64, 256$, und zwar

a) Gaußkurve erzeugt mit `amgauss` sowie modulierte Gaußkurve (siehe `fmconst`).

b) Rechteckfenster `amrect` und Dreiecksfenster `amtriang`.

Beschreiben Sie den Einfluss der Modulation und von N auf die Ergebnisse.