TU Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Sommersemester 2014

13.05.2014

Angewandte Harmonische Analysis

5. Übungsblatt

Abgabetermin: 23.05.2014, 18:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 17 Stetigkeit der STFT
Zu $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ betrachten wir die Kurzzeit-Fouriertransformation $V_g(f)$ mit

$$V_g(f)(t,\omega) \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}} f(u)\overline{g(u-t)}e^{-2\pi i\omega u}\, du\,, \qquad t,\omega \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $V_g(f)$ stetig in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 18 Zeit- und Frequenzbreite des Linearen Chirps
Wir betrachten den linearen Chirp

$$f(t) = \sqrt[4]{2\alpha}\; e^{-\pi(\alpha-i\gamma)t^2}, \qquad t \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte wiederum ein linearer Chirp ist mit

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt[4]{2\alpha}}{\sqrt{\alpha - i\gamma}} e^{-\pi\omega^2/(\alpha-i\gamma)}, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

mit komplexem Parameter $\frac{1}{\alpha-i\gamma} = \frac{\alpha+i\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}$.

b) Berechnen Sie die Zeit- und Frequenzbreite $\Delta(f)$ bzw. $\Delta(\hat{f})$.

Aufgabe 19 STFT des linearen Chirps
Zum linearen Chirp f in Aufgabe 18 bilden wir die Kurzzeit-Fouriertransformation mit der gleichen Fensterfunktion g wie in Aufgabe 17; dies liefert (Nachweis ist nicht erforderlich)

$$\begin{aligned} V_g f(t,\omega) \quad = \quad \tfrac{\sqrt[4]{4\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta-i\gamma}} \exp\left(-2\pi i \tfrac{\beta t\omega}{\alpha+\beta}\right) \quad & \exp\left(-\pi t^2 \left(\tfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} - i\tfrac{\gamma\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}\right)\right)\ldots \\ & \ldots \exp\left(-\tfrac{\pi}{\alpha+\beta-i\gamma}\left(\omega - \tfrac{\gamma\beta t}{\alpha+\beta}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Berechnen Sie hieraus die Parameter $e_T(t)$, $e_F(\omega)$, $\omega^*(f,t)$, $t^*(f,\omega)$ sowie $\mathrm{Var}_F(f,t)$ und $\mathrm{Var}_T(f,\omega)$.

Aufgabe 20 STFT mittels Toolbox
Die Kurzzeit-Fouriertransformation wird mit dem Programm `tfrstft` der Time-Frequency Toolbox berechnet.
Berechnen Sie damit die Kurzzeit-Fouriertransformation des linearen Chirps ($\alpha = .01$, $\gamma = 0.005$), der auf dem Intervall $t \in [-128, 127]$ ganzzahlig abgetastet wird ($N = 256$), mit Fensterfunktionen zu verschiedenen Parametern β. Stellen Sie weiterhin die Funktionen $t^*(f, \omega)$, $\omega^*(f, t)$ und die zugehörigen Varianzen graphisch dar (hierzu: `loctime` und `locfreq` auf Zeilen/Spalten der STFT anwenden).
Ein Beispiel zur Berechnung der STFT finden Sie im Tutorial der Time-Frequency Toolbox.

Aufgabe 21 Identitäten der globalen Mittel
$V_g f$ sei die Kurzzeit-FT von $f \in L_2(\mathbb{R})$ zu einem Fenster $g \in L_1 \cap L_\infty$, und es gelte $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$. Zeigen Sie für die "globalen Mittel" die Identitäten

$$\int\limits_{\mathbb{R}} t\, e_T(t)\, dt \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}} t^*(f, \omega)\, e_F(\omega)\, d\omega \quad = \quad t^*(f) - t^*(g)$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \omega\, e_F(\omega)\, d\omega \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \omega^*(f, t)\, e_T(t)\, dt \quad = \quad \omega^*(f) - \omega^*(g).$$

Hinweis: Am 19. Mai findet die Vorlesung abweichend um 16 Uhr in Raum M/E 25 statt, die nächste Übung ist am 26. Mai.