TU Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Sommersemester 2014

30.05.2014

Angewandte Harmonische Analysis

6. Übungsblatt

Abgabetermin: 13.06.2014, 10:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 22 Frames in endlichen Dimensionen
Gegeben seien ein Hilbertraum V der Dimension $d < \infty$ mit Frame $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^m$ $(m \geq d)$ und Frame-Schranken $0 < A \leq B < \infty$. Der Operator $S = C^*C : V \to V$ mit $Sx = \sum_j \langle x, f_j \rangle f_j$ für $x \in V$ besitze die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ mit $A \leq \lambda_d \leq \ldots \leq \lambda_1 \leq B$ (vgl. Vorlesung).

a) Zeigen Sie, dass $\sum_k \lambda_k = \sum_j \|f_j\|^2$.

b) Für einen Unterraum W von V sei P_W die Orthogonalprojektion von V auf W. Weisen Sie nach, dass $\{P_W f_j\}_{j=1}^m$ einen Frame von W mit Schranken A und B darstellt.

c) Beweisen Sie, dass für einen normalisierten Tight Frame $\mathcal{F}$, d.h. $A = B$ und $\|f_j\|_2 = 1$ für $j = 1, \dots, m$, die Eigenschaft $A \geq 1$ gilt, wobei $A = 1$ genau dann erfüllt ist, wenn $\mathcal{F}$ eine ONB von V ist.

d) Folgern Sie, dass ein normalisierter Tight Frame $A = m/d$ erfüllt.

Aufgabe 23 Frame-Erweiterung zu einem Tight Frame
Es sei $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^m$ ein Frame im Hilbertraum V mit $\dim V = d < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{G} = \{g_2, \dots, g_d\}$ existiert, so dass $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ einen Tight Frame von V bildet.

Tipp: Betrachten Sie mit den Notationen aus Aufgabe 22 die Vektoren $g_\ell = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_\ell}\, e_\ell$ für $\ell = 2, \dots, d$, wobei $\mathcal{E} = \{e_\ell\}_{\ell=1}^d$ eine ONB aus Eigenvektoren von S darstellt. (Wie lautet die Frame-Schranke?)

Aufgabe 24 Harmonische Tight Frames
Sei $m \geq d$ und $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}^d$ mit

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2\pi i (j-1)/m} \\ \vdots \\ e^{2\pi i (d-1)(j-1)/m} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Zeigen Sie, dass $f_1, \dots, f_m$ einen normalisierten Tight Frame darstellen und geben Sie die Frame-Konstante A an.

Aufgabe 25 ℓ^2-Optimalität der Frame-Koeffizienten
Es sei $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^m$ ein Frame von V mit Frame-Operator S, d.h. für $f \in V$ gilt

$$f = \sum_{j=1}^{m} \langle f, S^{-1} f_j \rangle f_j = \sum_{j=1}^{m} \langle f, f_j \rangle S^{-1} f_j \,.$$

Zeigen Sie, dass für die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m$ einer beliebigen Darstellung $f = \sum_j c_j f_j$ die folgende Identität gilt:

$$\sum_{j=1}^{m} |c_j|^2 \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} |\langle f, S^{-1} f_j \rangle|^2 + \sum_{j=1}^{m} |c_j - \langle f, S^{-1} f_j \rangle|^2 \,.$$

Interpretieren Sie kurz diese Aussage.

Aufgabe 26 Basen in unendlich-dimensionalen Hilberträumen
Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit $\dim \mathcal{H} = \infty$ und ONB $\mathcal{E} = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Weiter sei $y_k = e_k - e_{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass aus $\langle x, y_k \rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $x = 0$ folgt.
Also ist $\operatorname{span}(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dicht in $\mathcal{H}$.

b) Als konkretes Beispiel zur Dichtheit zeige man

$$e_1 \quad = \quad \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N}\right) y_k \,.$$

c) Weisen Sie nach, dass $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine Schauder-Basis ist.

Tipp zu Teil c): Führen Sie die Annahme

$$e_1 \quad = \quad \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \beta_k y_k$$

mit irgendeiner Koeffizientenfolge $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zum Widerspruch.