TU Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Sommersemester 2014

16.06.2014

Angewandte Harmonische Analysis

7. Übungsblatt

Abgabetermin: 23.06.2014, 10:00 Uhr
Briefkasten 98

Aufgabe 27 Riesz-Basen in Hilberträumen
Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Familie in einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bildet genau dann eine *Riesz-Basis*, wenn $f_k = Te_k$ gilt, wobei $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine ONB von $\mathcal{H}$ und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linear, beschränkt und bijektiv ist.

b) Die *duale Riesz-Basis* zu $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist gegeben durch $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $g_k = (T^{-1})^* e_k$.

c) Die *optimalen Riesz-Schranken* sind gegeben durch $A = 1/\left\|T^{-1}\right\|^2$ und $B = \|T\|^2$.

d) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bildet einen Frame mit den Schranken $0 < A \le B$ aus Teil c).

Wir betrachten in den **Aufgaben 28-30** die einseitige Exponentialfunktion

$$g(t) \quad = \quad e^{-t}\chi_{[0,\infty)}(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 28 Schur-Test zur Beschränktheit
Zeigen Sie mit Hilfe des Schur-Tests, dass für beliebige $\alpha, \beta > 0$ die Matrix

$$P(t) \quad = \quad (g(t - k\alpha - \ell/\beta))_{k,\ell\in\mathbb{Z}}$$

einen linearen beschränkten Operator auf $\ell_2(\mathbb{Z})$ definiert.
Welche Aussage können Sie hieraus für die Gabor-Familie $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ folgern?

Aufgabe 29 Bestimmung einer Linksinversen
Nun seien $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha\beta \le 1$ gegeben.
Beweisen Sie, dass die Matrix $P_\gamma(t)$ zur Funktion

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) \quad = \quad \begin{cases} \beta e^t, & 0 \le t < \alpha \\ -\beta e^t, & -\alpha < t < 0 \\ 0, & |t| \ge \alpha, \end{cases}$$

die Identität $P_\gamma(t)^* P_g(t) = \beta \mathrm{Id}_{\ell_2(\mathbb{Z})}$ erfüllt.

Aufgabe 30 Bestimmung von Frame-Schranken
Führen Sie für die Matrizen $P_\gamma(t)$ in Aufgabe 29 den Schur-Test durch und bestimmen Sie Frame-Schranken der Gabor-Familie in Aufgabe 28 für $\alpha\beta \le 1$.