TU Dortmund
Institut für Angewandte Mathematik
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Dr. Tobias Springer

Sommersemester 2014

24.06.2014

Angewandte Harmonische Analysis

8. Übungsblatt

Abgabetermin: 30.06.2014, 10:00 Uhr
Briefkasten 98

Da die Aufgaben 29 und 30 in der Übung noch nicht besprochen wurden, werden sie Thema in der kommenden Übung sein. Eine erneute Abgabe ist auf Grund der späten Behandlung in der Vorlesung und der Bedeutung für die Theorie der Gabor-Frames daher zulässig.

Wir betrachten in den **Aufgaben 29-30** erneut die einseitige Exponentialfunktion

$$g(t) \quad = \quad e^{-t}\chi_{[0,\infty)}(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 29 Bestimmung einer Linksinversen
Es seien $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha\beta \leq 1$ gegeben. Beweisen Sie, dass die Matrix $P_\gamma(t)$ zur Funktion

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) \quad = \quad \begin{cases} \beta e^t, & 0 \leq t < \alpha \\ -\beta e^t, & -\alpha < t < 0 \\ 0, & |t| \geq \alpha, \end{cases}$$

die Identität $P_\gamma(t)^* P_g(t) = \beta \mathrm{Id}_{\ell_2(\mathbb{Z})}$ erfüllt.

Aufgabe 30 Bestimmung von Frame-Schranken
Führen Sie für die Matrizen $P_\gamma(t)$ in Aufgabe 29 den Schur-Test durch und bestimmen Sie Frame-Schranken der Gabor-Familie $\mathcal{G}(g; \alpha, \beta)$ in Aufgabe 28 für $\alpha\beta \leq 1$.

Aufgabe 31 Kanonischer Dual des linearen B-Splines
Es seien $g = N_2 \in C(\mathbb{R})$ der lineare B-Spline mit $g(t) = (1 - |t|)_+ = \max(1 - |t|, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, sowie $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Bestimmen Sie für $\alpha = 1$ und $\beta = 1/n$

a) die Matrix $P_g(t)^* P_g(t)$,

b) die Moore-Penrose-Pseudoinverse $\Gamma(t)$ von $P_g(t)$, d.h.

$$\Gamma(t) \quad = \quad \left(P_g(t)^* P_g(t)\right)^{-1} P_g(t)^*,$$

c) und die Funktion $\tilde{g}$ zum kanonischen Dual von $\mathcal{G}(g; \alpha, \beta)$.

Aufgabe 32 Eine ganz einfache Aussage zu Tight Frames
Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}(g; \alpha, \beta)$ genau dann einen Tight Frame mit Frame-Schranke $A = 1$ bildet, wenn $P_g(t)^* P_g(t) = \beta\, \mathrm{id}_{\ell^2(\mathbb{Z})}$.