Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 15.04.2015

Höhere Mathematik IV

2. Übungsblatt

Abgabetermin: 23.04.2015, 12:00

Aufgabe 1

(i) Sei b stetig differenzierbar.

Zeigen Sie, dass durch

$$v(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x+c(s-t)}^{x-c(s-t)} b(w,s)\,dw\,ds$$

eine Lösung v der inhomogenen Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = b(x,t)$$

gegeben ist, die $v(x,0) = v_t(x,0) = 0$ erfüllt.

(Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass

$$H(x,t,s) = \int_{x+c(s-t)}^{x-c(s-t)} b(w,s)\,dw$$

die Gleichung $H_{tt} = c^2 H_{xx}$ erfüllt.)

(ii) Bestimmen Sie die Lösung des Cauchy-Problems

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= -e^x t, \\ u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= e^x \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad t \in (0,\infty),$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0$$

und homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0.$$

Stellen Sie die Lösung in möglichst einfacher geschlossener Form dar. (Tipp: Beachten Sie die Unstetigkeit der ungeraden Fortsetzung der Anfangsbedingungen und die Periodizität von u in t-Richtung.)

Zusatzaufgabe für die Übung (ohne Wertung)

Lösen Sie das Randanfangswertproblem für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 \\ u(0,t) &= 0 \\ u(\pi,t) &= \sin t + \cos t \\ u(x,0) &= \sin\tfrac{x}{2} + \sin x \\ u_t(x,0) &= \sin\tfrac{x}{2} \end{aligned}$$

(Tipp: Bestimmen Sie mit Hilfe von 34.6 zunächst die Randlösung $u_\pi(x,t)$, welche die Randbedingung bei $x = \pi$ erfüllt; vgl. 33.11)

Organisatorisches

- ACHTUNG: Die Vorlesung findet ab dem 17.04.2015 im Hörsaal M/E28 statt.
- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter `http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2015/hoema4.html`