Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 27.05.2015

Höhere Mathematik IV

8. Übungsblatt

Abgabetermin: 03.06.2015, 12:00

Aufgabe 1

i) Es sei $M = \{a, b, c, d\}$. Von einer Verknüpfung $\odot : M \times M \to M$ ist die Verknüpfungstafel nur unvollständig bekannt:

$\odot$	a	b	c	d
a	b			
b		b		
c			b	
d				b

Zeigen Sie, dass es genau eine Verknüpfung $\odot$ gibt, so dass $(M, \odot)$ eine Gruppe mit vier Elementen ist.
Tipp: Kümmern Sie sich um die Assoziativität als Letztes und klären Sie erst: Welches ist das neutrale Element? Welche Elemente sind invers zueinander? Ist die Gruppe abelsch?

ii) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Weiter gelte $a \cdot a = e$ für alle $a \in G$. Zeigen Sie: Dann ist G abelsch.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Menge aller reellen, symplektischen $2n \times 2n$-Matrizen

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) := \{S \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid S^T J \, S = J\},$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ eine Untergruppe der $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ ist.

ii) Beweisen Sie, dass die Blockmatrix

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

genau dann aus $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ ist, falls $A^T C$ und $B^T D$ symmetrisch sind, und $A^T D - C^T B = I_n$ gilt.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter `http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2015/hoema4.html`