Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 10.04.2015

Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

1. Übungsblatt

Abgabetermin: 16.04.2015, 12:00

Aufgabe 1

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei dreimal stetig differenzierbar; ihre Taylorentwicklung an der Stelle x_0 liefert also

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + h^3 \frac{f'''(\xi)}{6}$$

mit einem ξ zwischen x_0 und $x_0 + h$. Zur Approximation der Ableitung $f'(x_0)$ verwendet man gerne den *zentrierten Differenzenquotienten*

$$\Delta_h^*(f; x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}, \quad h \neq 0.$$

Rechnen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung die folgende Abschätzung nach

$$|f'(x_0) - \Delta_h^*(f; x_0)| \leq \frac{h^2}{6} \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0 + h} |f'''(x)|.$$

Aufgabe 2

Das Hornerschema zur "Division mit Rest" eines Polynoms durch den Linearfaktor $(x - x_0)$ ergibt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)(b_n x^{n-1} + \cdots + b_1) + b_0;$$

die Koeffizienten b_k werden rekursiv berechnet gemäß

$$b_n = a_n, \qquad b_k = a_k + x_0 b_{k+1} \quad \text{für} \quad k = n-1, n-2, \ldots, 0.$$

Hierbei ist $b_0 = p(x_0)$ der Funktionswert von p an der Stelle x_0.
Führt man mit den neuen Koeffizienten $b_n, \ldots, b_1$ fort, also

$$c_n = b_n, \qquad c_k = b_k + x_0 c_{k+1} \quad \text{für} \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1,$$

so erhält man sogar

$$p(x) = (x - x_0)^2 (c_n x^{n-2} + \cdots + c_2) + c_1 (x - x_0) + b_0.$$

Weitere Schritte liefern die Taylorentwicklung von p um x_0.

Als Beispiel wählen wir $p(x) = x^3 + x^2 - 2$ und erhalten

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & 0 & -2 \\
x = 1 & & 1 & 2 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & \mathbf{0} \\
x = 1 & & 1 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \mathbf{5} & \\
x = 1 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & \mathbf{4} & & \\
x = 1 & & & & \\
\hline
 & \mathbf{1} & & &
\end{array}
$$

Die fettgedruckten Zahlen sind die Taylorkoeffizienten von p um $x = 1$ und liefern die Darstellung

$$p(x) = x^3 + x^2 - 2 = 0 + 5(x-1) + 4(x-1)^2 + 1(x-1)^3.$$

(i) Bestimmen Sie mit diesem Schema die Taylorentwicklung des Polynoms $q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = -1$.

(ii) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion *horner.m*, welche das oben erläuterte vollständige Hornerschema durchführt. Dabei sollen beim Aufruf der Funktion der Koeffizientenvektor des Polynoms in Monomdarstellung, sowie der Entwicklungspunkt übergeben werden. Die Ausgabe soll ein Zeilenvektor sein, welcher die Koffizienten der Taylorentwicklung enthält:

```
function c = horner(v,x0)
```

Denken Sie bei der Anfertigung auch an einen Funktionskopf, welcher die Funktion und den Aufruf durch Anwendung des *help* Befehls zweifelsfrei erklärt. Testen Sie ihr Programm an dem zuvor schriftlich berechneten Beispiel. Nicht lauffähige Programme werden nicht gewertet.

Organisatorisches

- Werfen Sie die schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in den jeweiligen Briefkasten Ihrer Übungsgruppe ein.

- Anzufertigende Programme senden Sie unter dem Betreff

  `NumPhyIng Übungsblatt [XX], Aufgabe [YY]`

  an die E-Mail Adresse Ihres Übungsbleiters. Im Programmkopf zählen Sie dabei alle Namen der Teilnehmer derjenigen Kleingruppe auf, die diese Aufgabe bearbeitet hat.

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
  `http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/`
  `lehrveranstaltungen/sose2015/numphy15.html`