Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Math. T. Kloos

Dortmund, 15.04.2015

Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

2. Übungsblatt

Abgabetermin: 23.04.2015, 12:00

Aufgabe 1

Es sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine symmetrische Matrix mit den Eigenwerten 10, 5, 3 und 2.

(i) Geben Sie die Spektralnormen $\|A\|_2$ und $\|A^{-1}\|_2$ an.

(ii) Was liefert der Störungssatz zur Lösung von $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^4$, wenn $\|b\|_2 = 1$, $\Delta_b \in \mathbb{R}^4$, sowie $\Delta_A = 0$ gilt?

(iii) Sei weiterhin $\Delta_A = 0$. Geben Sie mit Hilfe der Eigenvektoren von A Vektoren b und Δ_b so an, dass Gleichheit im Störungssatz gilt.

Aufgabe 2

Unser Ziel ist die Erzeugung von Testmatrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit bestimmten numerischen Eigenschaften, die im Laufe der Vorlesung behandelt werden. Dazu verwenden wir zufällig erzeugte Orthogonalmatrizen nach dem unten stehenden Algorithmus. Vorweg sei an die Definition der Orthogonalmatrix erinnert.

Definition. Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt Orthogonalmatrix, wenn $Q^TQ = I$ gilt, wobei I die Einheitsmatrix der Grße $n \times n$ ist. Gleichbedeutend mit dieser Bedingung an Q ist, dass sowohl die Spaltenvektoren als auch die Zeilenvektoren von Q eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Um orthogonale Matrizen Q zu generieren, gehen wir folgendermaßen vor:

- Für $1 \le k \le n$
  - wähle einen Zufallsvektor $v_k \in \mathbb{R}^k$ mit euklidischer Länge 1, also im Fall $k = 1$ ist $v_1 = (1)$ oder $v_1 = (-1)$, im Fall $k = 2$ ist $v_2 = \binom{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$, usw.
  - ergänze v_k oben mit Nullen zu einem Einheitsvektor $\tilde{v}_k \in \mathbb{R}^n$,
  - berechne die Householder-Matrix $H_k = I_n - 2\,\tilde{v}_k\,\tilde{v}_k^T$.
- Setze $Q = H_n * H_{n-1} * \cdots * H_1$.

Schreiben Sie ein Programm

```
function Q = randomQ(n)
```

mit Eingabeparameter $n \in \mathbb{N}$ (der Dimension von Q), das eine zufällige Orthogonalmatrix Q nach oben beschriebenem Algorithmus liefert. Verwenden Sie die Zufallsfunktion `randn` zur Erzeugung der v_k und denken Sie an die Normierung. Überprüfen Sie vor der Abgabe, dass die Eigenschaft $Q^TQ = I$ numerisch erfüllt ist.

Organisatorisches

- Werfen Sie die schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in den jeweiligen Briefkasten Ihrer Übungsgruppe ein.

- Anzufertigende Programme senden Sie unter dem Betreff

  `NumPhyIng Übungsblatt [XX], Aufgabe [YY]`

  an die E-Mail Adresse Ihres Übungsbleiters. Im Programmkopf zählen Sie dabei alle Namen der Teilnehmer derjenigen Kleingruppe auf, die diese Aufgabe bearbeitet hat.

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter `http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2015/numphy15.html`