

Numerische Mathematik für Physiker und Ingenieure

6. Übungsblatt

Abgabetermin: 28.05.2015, 12:00

Aufgabe 1

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Führen Sie zur Approximation der Lösung des obigen LGS einen Schritt des Gesamtschrittverfahrens zum Startvektor $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$ durch.
- (ii) Geben Sie eine Fehlerabschätzung $\|x^{(10)} - x^*\|_\infty$ für den Näherungsvektor des zehnten Iterationsschritts des Gesamtschrittverfahrens an.
- (iii) Eine Kommilitonin ist sich nicht ganz sicher, wie sie die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens begründen soll und schreibt Ihnen die folgenden Formeln auf:
 - a) $\rho(A) < 1$
 - b) $\rho((L + D)^{-1}R) < 1$
 - c) $\|D^{-1}(L + R)\|_\infty < 1$

Hierbei ist $\rho(M)$ der Spektralradius der Matrix M , und $A = L + D + R$ die übliche Zerlegung von A in Diagonalmatrix D , untere Dreiecksmatrix L und obere Dreiecksmatrix R . Wählen Sie eine richtige Bedingung aus und begründen Sie, dass diese Bedingung hinreichend für die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens ist.

Aufgabe 2

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion

$$[x, N] = \text{sor}(A, b, x_0, w, \text{tol}, \text{maxiter}),$$

welches das SOR-Verfahren zur Approximation der Lösung des LGS $Ax = b$ realisiert. Dabei sollen die Matrix A , die rechte Seite b , ein Startvektor x_0 , der Relaxierungsparameter $w \in [1, 2)$, eine Toleranzschwelle tol und eine maximale Anzahl an Iterationsschritten maxiter als Input eingegeben werden. Als Output soll die Näherungslösung $x = x^{(N)}$ und die Schrittzahl N mit $\|x^{(N)} - x^{(N-1)}\|_\infty \leq \text{tol}$ ausgegeben werden. Falls die Abbruchbedingung für $N = \text{maxiter}$ nicht erfüllt ist, soll die Iteration enden und eine entsprechende Warnung ausgegeben werden.

Testen Sie ihr Programm an dem LGS $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ die Tridiagonalmatrix mit Diagonale $(2, \dots, 2)$ und Nebendiagonalen $(-1, \dots, -1)$ ist (vgl. Aufgabe 2, Blatt 4) und $b = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{10}$. Starten Sie mit dem Vektor $x^{(0)} = (0, \dots, 0)^T$. Schreiben Sie ein Skript, welches das LGS für alle $w \in [1 : .05 : 1.95]$, $\text{tol} = 1e - 5$ und $\text{maxiter} = 1000$ durchführt und speichern Sie die Anzahl der Iterationsschritte ab. Plotten Sie anschließend die Schrittzahl in Abhängigkeit des Relaxierungsparameters und geben Sie das Bild mit Ihrer Abgabe ab.

Organisatorisches

- Werfen Sie die schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in den jeweiligen Briefkasten Ihrer Übungsgruppe ein.
- Anzufertigende Programme senden Sie unter dem Betreff
NumPhyIng Übungsblatt [XX], Aufgabe [YY]
an die E-Mail Adresse Ihres Übungsleiters. Im Programmkopf zählen Sie dabei alle Namen der Teilnehmer derjenigen Kleingruppe auf, die diese Aufgabe bearbeitet hat.
- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
<http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2015/numphy15.html>