Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Dortmund, 09.05.2016

Approximationstheorie II

1. Übungsblatt

Besprechung am 10.5.2016, keine Abgabe

Aufgabe 1 (Tschebyscheff-Spline)
Bestimmen Sie den stückweise linearen Tschebyscheff-Spline s^* zur Knotensequenz $\Delta = \{t_1 \le t_2 < t_3 < \cdots < t_n < t_{n+1} \le t_{n+2}\}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Interpolationsstützstellen X^* des Tschebyscheff-Splines genau die Knoten $t_2, \ldots, t_{n+1}$ sind.

Aufgabe 2 (Tschebyscheff-Polynom)
Wir betrachten zu $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, die Knotensequenz

$$\Delta = \{0 = t_1 = \cdots = t_k < t_{k+1} = \cdots = t_{2k} = 1\}.$$

Der zugehörige Splineraum ist der Raum der Polynome vom Grad $k-1$ auf dem Intervall $[a, b] = [0, 1]$, die B-Splines sind die Bernstein-Grundpolynome

$$N_{k,j}(x) = B_{k-1,j-1}(x) = \binom{k-1}{j-1} x^{j-1}(1-x)^{k-j}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

a) Zeigen Sie, dass das auf das Intervall $[0, 1]$ transformierte Tschebyscheff-Polynom $\widetilde{T}_{k-1}(x) = T_{k-1}(2x-1)$ auch gleichzeitig der Tschebyscheff-Spline zu dieser Knotensequenz ist. Bestimmen sie die zugehörige Stützstellen-Menge X^*.

b) In dem Artikel *Transformation of ChebyshevBernstein Polynomial Basis* von A. M. Rababah, Computational Methods in Applied Mathematics 3(4):608-622, 2003, wird die Darstellung

$$\widetilde{T}_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \left(\binom{2n}{2j} \Big/ \binom{n}{j} \right) B_{n,j}(x)$$

bewiesen (Lemma 3). Geben Sie hiermit die Zeilensummennorm der Inversen von $A_{X^*,\Delta}$ für die Ordnungen $k = 2, 3, 4, 5, 6$ an. Was ergibt sich für beliebiges $k \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 3 (Tschebyscheff-Polynom)
Wir betrachten erneut das Beispiel aus Aufgabe 2. Die Stellen X^* sind die Extremalstellen von $\widetilde{T}_{k-1}$, also

$$x^*_{k+1-i} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{(i-1)\pi}{k-1}\right), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Ziel dieser Aufgabe ist zu erkennen, dass die B-Splines (hier also die Bernstein-Grundpolynome) nicht immer die beste Basis zur Interpolation sind.
Wir verwenden stattdessen die Basis der transformierten Tschebyscheff-Polynome $\widetilde{T}_n$, $n = 0, \ldots, k-1$.

a) Stellen Sie die zugehörige Kollokationsmatrix A auf. Vergleichen Sie diese mit der *Diskreten Kosinus-Transformation* `DCT-I`, die z.B. auf der deutschen Wikipedia-Seite beschrieben wird.

b) Bestimmen Sie eine gute obere Schranke für die Zeilensummennorm von A^{-1}.

c) Bestimmen Sie damit eine obere Schranke für den Interpolationsoperator $P_{X^*,\Delta}$.

Wir behandeln weiterhin in der Übung den Alternantensatz zur Best-Approximation in $S_k(\Delta)$. Die Ergebnisse aus Kapitel 9 lassen sich sehr gut zum Beweis einsetzen.

Alternantensatz der Spline-Approximation
Es sei $[a, b] = [t_1, t_{n+k}]$ das Intervall, das alle Knoten der Sequenz Δ enthält. Die Funktion $s \in \mathcal{S}_k(\Delta)$ ist genau dann ein Proximum an $f \in C[a, b]$, wenn es ein Intervall $J := [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ und eine Extremalalternante

$$\alpha \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{m(J)} \leq \beta$$

in J gibt (wenn also $f(x_k) - s(x_k) = \epsilon(-1)^k \|f - s\|_{\infty,[a,b]}$ mit $\epsilon \in \{-1, 1\}$ gilt), wobei

$$m(J) = \dim \mathcal{S}_k(\Delta) \mid_J$$

die Dimension des Teilraums von $\mathcal{S}_k(\Delta)$ ist, der durch die Einschränkung der Splines auf das Intervall J entsteht.