Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Dortmund, 09.05.2016

Approximationstheorie II

2. Übungsblatt

Besprechung am 17.5.2016, keine Abgabe

Aufgabe 4 (Sobolev-Norm und Semi-Norm)
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Konstante $C > 0$ so, dass für alle $f \in H^2([a, b])$ und alle $0 < u \leq b - a$ die Ungleichung

$$u\|f'\|_{L_2(a,b)} \leq C \left(\|f\|_{L_2(a,b)} + u^2\|f''\|_{L_2(a,b)}\right)$$

gilt.

Aufgabe 5 (Poincaré-Ungleichung und mehr)
Weitere Ungleichungen sind (insbesondere im Mehrdimensionalen) von zentraler Bedeutung in der angewandten Analysis. Wir betrachten ein reelles Intervall $[a, b]$ und setzen

$$c_f := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{für} \quad f \in L^1(a, b).$$

a) Poincaré-Ungleichung:

   Bestimmen Sie eine Konstante $C > 0$ so, dass für alle $f \in H^1([a, b])$ gilt

$$\|f - c_f\|^2_{L_2(a,b)} \leq C\|f'\|^2_{L_2(a,b)}.$$

b) Friedrichs-Ungleichung:

   Bestimmen Sie eine Konstante $C > 0$ so, dass für alle $f \in H^1([a, b])$ mit $f(a) = f(b) = 0$ gilt

$$\|f\|^2_{L_2(a,b)} \leq C\|f'\|^2_{L_2(a,b)}.$$

Geben Sie mit Hilfe einer Literaturrecherche die bestmöglichen Konstanten C an. Die hierzu passende Ungleichung braucht aber nicht bewiesen zu werden.

Aufgabe 6 (Rieszscher Darstellungssatz)
Das von der Norm in Satz 10.2(iii) induzierte Skalarprodukt lässt sich auch schön ausnutzen, um die sogenannten "Peano-Kerne" der Quadraturformeln der numerischen Integration zu betrachten. Hierdurch erhält man die bestmöglichen Konstanten in den Fehlerabschätzungen der Newton-Cotes Formeln.
Verwenden Sie die konkrete Darstellung des Auswertungsfunktionals $\lambda_x(f) = f(x)$ zur Herleitung der üblichen Fehlerdarstellung der Simpson-Regel

$$\int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{(b-a)^5}{2880}\, f^{(4)}(\xi)$$

mit einer Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$.