Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Dortmund, 23.05.2016

Approximationstheorie II

3. Übungsblatt

Besprechung am 24.5.2016, keine Abgabe

Aufgabe 7 (natürliche Splines)
Wir betrachten zu $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2m$ und zur Knotensequenz $\Delta = \{a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b\}$ den Raum der natürlichen Splines

$$S_{2m}^{\mathrm{nat}}(\Delta) = \{s \in S_{2m}(\Delta) : s^{(m)}(a) = \cdots = s^{(2m-1)}(a) = 0,\ s^{(m)}(b) = \cdots = s^{(2m-1)}(b) = 0\}.$$

Insbesondere ist für $a < x_1$ das erste Polynomstück $s|_{[a,x_1)}$ nur vom Grad $m-1$ anstatt $2m-1$; entsprechend für $x_n < b$.
Zeigen Sie, dass die Funktionen $(\phi_j;\ j = 1, \ldots, n)$ mit $\phi_j = N_{2m,j-m}$ für $j = m+1, \ldots, n-m$ sowie

$$\phi_j(x) = \int_x^{x_{m+j}} \frac{(x_{m+j} - t)^{m-j}}{(m-j)!} M_{m+j-1,1}(t)\, dt, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$\phi_{n+1-j}(x) = \int_{x_{n+1-m-j}}^{x} \frac{(t - x_{n+1-m-j})^{m-j}}{(m-j)!} M_{m+j-1,n+1-m-j}(t)\, dt, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

eine Basis von $S_{2m}^{\mathrm{nat}}(\Delta)$ sind. Geben Sie den Träger und den exakten Polynomgrad der Basisfunktionen im Intervall $[a, x_1)$ an.

Aufgabe 8 (Datenglättung)
Wir behandeln hier die numerische Berechnung des Glättungssplines $s_\rho \in S_{2m}^{\mathrm{nat}}(\Delta)$, der zu den Daten $y = (y_1, \ldots, y_n)$ und festem $\rho > 0$ die Minimierungsaufgabe

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |s(x_i) - y_i|^2 + \rho \|s^{(m)}\|_{L^2}^2 = \min!$$

löst. Dazu verwenden wir die Basis ϕ_j aus Aufgabe 7 und die Matrizen

$$A = (\phi_j(x_i))_{i,j=1,\ldots,n}, \qquad B = (b_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \quad \text{mit} \quad b_{i,j} = \int_a^b \phi_i^{(m)}(t) \phi_j^{(m)}(t)\, dt.$$

a) Der Koeffizientenvektor $c = (c_1, \ldots, c_n)$ von $s_\rho = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j$ erfüllt die Normalengleichung

$$\left(\frac{1}{n} A^T A + \rho B \right) c = \frac{1}{n} A^T y.$$

b) Die Matrix $\frac{1}{n} A^T A + \rho B$ ist eine positiv definite Bandmatrix mit Bandbreite $2m - 1$.

c) Für $\rho \to 0$ konvergiert s_ρ gleichmäßig gegen den Interpolationsspline in $S_{2m}^{\mathrm{nat}}(\Delta)$.

d) Für $\rho \to \infty$ konvergiert s_ρ gleichmäßig gegen das Regressionspolynom p vom Grad $m - 1$ zur Methode der kleinsten Fehlerquadrate.