Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Dortmund, 01.06.2016

Approximationstheorie II

4. Übungsblatt und Programmieraufgabe

Besprechung am 14.06.2016, keine Abgabe

Der Artikel von T. Lyche und L. Schumaker, “Computation of smoothing and interpolating natural splines via local bases”, SIAM J. Numer. Anal. 1973, vol. 10, no. 6, pp. 1027–1038, gibt eine ausführliche Betrachtung der Basisfunktionen aus Aufgabe 7. Dabei werden wie in Aufgabe 7 die mittleren Basisfunktionen $B_j = \phi_j = N_{2m,j-m}$ für $j = m+1,\dots,n-m$ angegeben. Für die ersten und letzten m Basisfunktionen wird eine andere Normierung gewählt, nämlich

$$B_j(x) = \frac{(2m-1)!}{(m+j-1)!}\phi_j(x) = \left[x_1,\dots,x_{m+j}\,|\,(\cdot - x)_+^{2m-1}\right], \qquad j = 1,\dots,m,$$

$$B_j(x) = \frac{(2m-1)!}{(m+n-j)!}\phi_j(x) = (-1)^{n+m-j}\left[x_{j-m},\dots,x_n\,|\,(x-\cdot)_+^{2m-1}\right], \qquad j = n-m+1,\dots,n.$$

Die Auswertung natürlicher Splines

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j B_j(x)$$

erfolgt analog zum Cox-de Boor Algorithmus mit Hilfe der Rekursion aus Abschnitt 6 der Arbeit.
Auf der Vorlesungswebseite ist die Datei `bspline.zip` abgelegt, die die in der Übung bereits vorgestellten Algorithmen zur Interpolation und Least-Squares Approximation mit B-Splines enthält. Hinzugekommen ist das Programm `natspval`, das die Auswertung von s vornimmt. In `natspEmat` wird die Matrix E für Aufgabe 9 geliefert.

Aufgabe 9
Wir behandeln die numerische Berechnung des Glättungssplines $s_\rho = \sum_{j=1}^n c_j^{(\rho)} B_j$ in Aufgabe 8, der zu den Daten $y = (y_1,\dots,y_n)$ und festem $\rho > 0$ die Minimierungsaufgabe

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |s(x_i) - y_i|^2 + \rho \|s^{(m)}\|_{L^2}^2 = \min!$$

löst. Die Matrizen A und B werden wie in Aufgabe 8 definiert,

$$A = (B_j(x_i))_{i,j=1,\dots,n}, \qquad B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \quad \text{mit} \quad b_{i,j} = \int_a^b B_i^{(m)}(t) B_j^{(m)}(t)\,dt.$$

Weiter bezeichnen wir den erzielten Least-Squares Fehler mit

$$F(w) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |s_\rho(x_i) - y_i|^2\right)^{1/2}, \qquad w := 1/\rho > 0.$$

a) In Lemma 3.1 der angegebenen Arbeit wird die Identität $B = A^T E$ mit der Matrix

$$E = (e_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \quad \text{mit} \quad e_{i,j} = (-1)^m (2m-1)!\beta_{ij}$$

bewiesen. Arbeiten Sie die Beweisführung durch. Zeigen Sie, dass sich damit die Normalengleichungen aus Aufgabe 8 vereinfachen zu

$$\left(\frac{1}{n} A + \rho E\right) c = \frac{1}{n} y.$$

b) Schreiben Sie ein Programm `natsplinesmooth`, das die obige Minimierungsaufgabe löst. Verwenden Sie dazu eine ähnliche Technik wie in `bsplineint`.

c) Stellen Sie anhand eines geeigneten Beispiels graphisch dar, dass die Funktion $w \mapsto F(w)$ monoton fallend gegen Null und konvex ist.

Aufgabe 10

Die Bestimmung eines "optimalen" Parameters $\rho > 0$ wird durch die Vorgabe einer Fehlertoleranz S erzielt: finde $\rho > 0$ maximal mit

$$F(1/\rho) \leq \sqrt{S}.$$

Dabei wird die Monotonie und Konvexität von F ausgenutzt.

Ergänzen Sie das Programm aus Aufgabe 9 wie in Abschnitt 8 der angegebenen Arbeit, um das optimale ρ zu bestimmen.