Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Dortmund, 20.06.2016

**Approximationstheorie II**

5. Übungsblatt und Programmieraufgabe

Besprechung am 21.06.2016, keine Abgabe

**Aufgabe 11**

Es seien $L_j \in \mathcal{P}_j$ die Legendre-Polynome auf $T = [-1,1]$, also Orthogonalpolynome zum Standard-Skalarprodukt normalisiert gemäß

$$\int_{-1}^{1} L_j(x)^2\, dx = 1.$$

Zeigen Sie, dass der Produktkern

$$K_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x)L_j(y), \qquad x, y \in [-1,1].$$

die geschlossene Form

$$K_n(x,y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \, \frac{L_{n+1}(x)L_n(y) - L_n(x)L_{n+1}(y)}{x-y}$$

besitzt, wobei $k_j$ der Höchstkoeffizient von $L_j$ ist. Man bezeichnet diese Darstellung als Christoffel-Darboux Formel.

**Aufgabe 12**

Mit Hilfe eines Produktkerns lässt sich ein Beispiel eines reproduzierenden Kerns $K(x,y)$ angeben, der nur stetig in jeder Variablen ist (beim Festhalten der anderen Variablen), aber nicht stetig auf $T \times T$. (Ref. http://mathoverflow.net/questions/210481/reproducing-kernel-of-a-rkhs-of-continuous-functions-may-not-be-continuous-in-tw)

Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine streng monoton fallende Nullfolge mit $a_1 = 1$. Wir setzen zusätzlich $a_0 = 1$ und betrachten die normalisierten linearen B-Splines

$$\phi_k(x) = N_{2,k}(x) = (a_k - a_{k+2})[a_{k+2}, a_{k+1}, a_k \mid (\cdot - x)_+], \qquad k \geq 0,$$

d.h. $\phi_k$ hat den Träger $[a_{k+2}, a_k]$, den Wert $\phi_k(a_k) = 1$, ist stückweise linear und stetig.
Wir betrachten den Kern

$$K(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x)\phi_k(y), \qquad x, y \in T = [0,1].$$

a) Zeigen Sie, dass $K$ hierdurch punktweise auf $T \times T$ definiert ist, stetig bzgl. jeder einzelnen Variablen ist, aber nicht stetig auf $T \times T$.

b) Zeigen Sie, dass

$$H = \left\{ f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k;\ (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \right\}$$

mit dem von $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ induzierten Skalarprodukt

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k, \sum_{k=0}^{\infty} d_k \phi_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k d_k$$

ein Hilbertraum ist.

c) Zeigen Sie, dass jedes Auswertungsfunktional $\lambda_x : H \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$, mit $x \in [0,1]$ stetig ist.

d) Zeigen Sie, dass $K$ der reproduzierende Kern von $H$ ist.