Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Dortmund, 28.06.2016

Approximationstheorie II

6. Übungsblatt

Besprechung am 28.06.2016, keine Abgabe

Aufgabe 13

Für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist die Autokorrelationsfunktion definiert als

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\overline{f(y-x)}\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y+x)\overline{f(y)}\,dy.$$

a) Zeigen Sie $|F(x)| \le F(0) = \|f\|_2^2$ sowie $F(-x) = \overline{F(x)}$.

b) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist auch $F \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und die Fouriertransformierten

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx, \qquad \hat{F}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx,$$

erfüllen $\hat{F}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2$.

c) Schreiben Sie explizit die Gaussfunktion $g(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{d/2} e^{-\alpha\|x\|^2}$ als Autokorrelationsfunktion einer weiteren Gaussfunktion. (Zur Rechnung verwende man ohne Beweis $\hat{g}(\xi) = e^{-\|\xi\|^2/(4\alpha)}$.)

Aufgabe 14 (The Dimension-Walk)

Eine Methode zur Konstruktion positiv definiter radial-symmetrischer Funktionen $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ wurde mit Hilfe von zwei einfachen Operatoren erzielt. Dazu betrachten wir gerades $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und verwenden die Bezeichnung der Vorlesung

$$\mathcal{F}_d(\phi)(r) = 2\pi r^{-(d-2)/2} \int_0^\infty \phi(t)t^{d/2}J_{(d-2)/2}(2\pi r t)\,dt.$$

a) Für gerades ϕ mit $t\phi(t) \in L^1(0,\infty)$ setzen wir

$$I(\phi)(r) = \int_r^\infty t\phi(t)\,dt, \qquad r \ge 0,$$

und $I(\phi)(r) = I(\phi)(-r)$ für $r < 0$. Dann gilt für $d \ge 3$ und $t^{d-1}\phi(t) \in L^1(0,\infty)$

$$\mathcal{F}_d(\phi) = \mathcal{F}_{d-2}(I(\phi)).$$

(Hinweis: Aus der Reihenentwicklung folgt die Identität $(z^\nu J_\nu(z))' = z^\nu J_{\nu-1}(z)$ der Bessel-Funktionen.)

b) Für gerades $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ mit 2. Ableitung $\phi''(0) = a$ setzen wir

$$D(\phi)(r) = -\frac{1}{r}\,\phi'(r), \qquad r > 0,$$

$D(\phi)(0) = -a$ sowie $D(\phi)(r) = D(\phi)(-r)$ für $r < 0$. Dann gilt für $d \geq 1$ und $t^d\phi'(t) \in L^1(0, \infty)$

$$\mathcal{F}_d(\phi) = \mathcal{F}_{d+2}(D(\phi)).$$

c) Für gerades $\phi \in C^{2r}(\mathbb{R})$ mit $t\phi(t) \in L^1$ ist $I(\phi) \in C^{2r+1}(\mathbb{R})$ und $I(\phi)$ ist $2r + 2$-mal differenzierbar an der Stelle 0. Weiter gilt $D(I(\phi)) = \phi$.

d) Für gerades $\phi \in C^{2r+1}(\mathbb{R})$ mit $2r + 2$-ter Ableitung in 0 gilt $D(\phi) \in C^{2r}(\mathbb{R})$. Im Fall $\phi' \in L^1$ gilt weiter $I(D(\phi)) = \phi$.