Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Dortmund, 12.07.2016

Approximationstheorie II

7. Übungsblatt

Besprechung am 12.07.2016, keine Abgabe

Aufgabe 15 (Fourier-Transform-Charakterisierung)
Es sei $\Phi \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ reell-wertig und positiv definit. Φ sei nicht die Nullfunktion. Wir definieren den Funktionenraum

$$\mathcal{N} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d) : \hat{f}/\sqrt{\hat{\Phi}} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

a) Zeigen Sie, dass
$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}}{\hat{\Phi}(\xi)}\, d\xi$$
ein Skalarprodukt auf $\mathcal{N}$ definiert.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{N}$ versehen mit diesem Skalarprodukt ein Hilbertraum ist und dass die Auswertungsfunktionale stetig sind.

c) Zeigen Sie, dass $K(x, y) = \Phi(x - y)$ der reproduzierende Kern von $\mathcal{N}$ ist.

Aufgabe 16 (Sobolev-Räume)
Die Sobolev-Räume $H^m(\mathbb{R}^d)$, $m > 0$, sind gegeben durch

$$H^m(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \; (1 + \|\xi\|_2^2)^m \, d\xi < \infty\},$$

also über die gewichtete L^2-Norm der Fouriertransformierten mit der Gewichtsfunktion $w_m(\xi) = (1 + \|\xi\|_2^2)^m$.
Zeigen Sie: Erfüllt die Funktion Φ in Aufgabe 15 die Abschätzung

$$c_1 w_m(\xi) \le \frac{1}{\hat{\Phi}(\xi)} \le c_2 w_m(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

mit Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so ist $\mathcal{N} = H^m(\mathbb{R}^d)$.