Prof. Dr. J. Stöckler
PD Dr. Maria Charina-Kehrein

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

11. Übungsblatt zur Numerik II
SS 2010 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Abgabetermin für die Aufgaben 38 und 40 ist Montag, 12.07.10, 12:15 Uhr.
Internetseite:
`www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2010/numII10.html`

Aufgabe 38 (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für den Dämpfungsfaktor G der impliziten Trapezregel

$$G(z) = \frac{2+z}{2-z}, \quad z = h\alpha,$$

gilt und damit die implizite Trapezregel A-*stabil* ist.

Aufgabe 39 Jedes der in der Vorlesung betrachteten expliziten Einschrittverfahren nimmt angewendet auf eine lineare AWA

$$Y'(x) = A \cdot Y(x), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad Y(x_0) = Y_0,$$

die Form $Y_k = G(hA)Y_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ an, mit einem Polynom G.

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass bzgl. der euklidischen Vektor-Norm $\|\cdot\|_2$ die Abschätzung

$$\|Y_k\|_2 \le \left(\max_{1\le j\le n} |G(h\lambda_j)|\right)^k \cdot \|Y_0\|_2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

mit den Eigenwerten λ_j von A gilt. (**Hinweis:** Symmetrische Matrizen besitzen ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren.)

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Bestimmen Sie den Vektor Y_0 so, dass die Gleichheit in (1) gilt.

(iii) Bestimmen Sie mit Hilfe von (i) die maximale Schrittweite h, für die das klassische RK-Verfahren 4.Ordnung das System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -10y_1(x) + 9y_2(x) \\ y_2'(x) &= 9y_1(x) - 10y_2(x) \end{aligned}$$

stabil integriert, d.h. beschränkte Lösungen liefert.

Aufgabe 40 (3 Punkte) Gegeben sei das eingebettete RK-Verfahren 4.Ordnung

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k) \\ K_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{4}K_1 + \frac{h}{4}K_2\right) \\ K_4 &= f\left(x_k + h, y_k - hK_2 + 2hK_3\right) \\ \Phi_A &= \frac{1}{6}\left(K_1 + 4K_3 + K_4\right), \end{aligned}$$

das zum RK-Verfahren 5.Ordnung durch die zusätzlichen Formeln

$$\begin{aligned}
K_5 &= f\left(x_k + \frac{2h}{3}, y_k + \frac{h}{27}(7K_1 + 10K_2 + K_4)\right)\\
K_6 &= f\left(x_k + \frac{h}{5}, y_k + \frac{h}{625}(28K_1 - 125K_2 + 546K_3 + 54K_4 - 378K_5)\right)\\
\Phi_B &= \frac{1}{336}\,(14K_1 + 35K_4 + 162K_5 + 125K_6)
\end{aligned}$$

erweitert wird. Ändern Sie das MATLAB–Programm aus Beispiel 9.65 so, dass die oben angegebenen Verfahren zur Schrittweitensteuerung beim Lösen der AWA

$$y' = \alpha \cdot x \cdot y^2, \quad y(0) = 1, \quad \alpha = -20 \quad \text{oder} - 100,$$

benutzt werden.

Aufgabe 41 Gegeben sei die AWA

$$y' = -x^2 y, \quad y(0) = 1.$$

Berechnen Sie zur Schrittweite $h = \frac{1}{4}$ eine Näherung an $y(1)$

(i) mit dem Verfahren $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\,(3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1}))$ und den Startwerten $y_0 = y(0)$ und $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$;

(ii) mit der impliziten Trapezregel (durch Auflösung der impliziten Gleichung nach y_{k+1} und anschließender Iteration);

(iii) mit dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren, das als Prädiktor das Verfahren aus (i) verwendet und anschließend einen Korrektorschritt mit dem Verfahren aus (ii) durchführt.