Prof. Dr. J. Stöckler
PD Dr. Maria Charina-Kehrein

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

12. Übungsblatt zur Numerik II
SS 2010 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Internetseite:
`www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2010/numII10.html`

Aufgabe 42

(i) Zeigen Sie, dass ein lineares Mehrschrittverfahren

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{m} \beta_j f_{n+j}, \quad \alpha_k = 1, \quad |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0,$$

genau dann die Konsistenzordnung p hat, wenn

$$\phi(x) := \sum_{j=0}^{m} (\alpha_j - x\beta_j) e^{jx}$$

in $x = 0$ eine $(p+1)-$fache Nullstelle besitzt.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Resultats in (i), dass das explizite lineare $2-$Schrittverfahren

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + a y_n = \frac{h}{2}\left[(3-a)f_{n+1} - (1+a)f_n\right]$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ die Konsistenzordnung 2 hat.

(iii) Berechnen Sie mit Hilfe des Verfahrens in (ii) mit $a = 0$ sowie mit $a = -5$ eine Näherung an die Lösung der AWA

$$y' = 4x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1,$$

an der Stelle $x = 2$. Benutzen Sie dafür die Startwerte $y_0 = 1$ und $y_1 = (1+0.01)^2$ sowie $h = 0.1$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad y(x) = (1+x^2)^2,$$

der AWA und erklären Sie, warum sie sich so stark unterscheiden.

Aufgabe 43 Zeigen Sie, dass das Verfahren

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{3}\left(8f_{n+2} - 13f_{n+1} + 8f_n\right),$$

konvergent ist.

Aufgabe 44

(i) Leiten Sie mit Hilfe der Taylorentwicklungen von $y(x_{n+1})$ und $y(x_{n-1})$ die folgenden numerischen Differentiationsformeln her

$$\frac{y(x_n+h)-2y(x_n)+y(x_n-h)}{h^2} = y''(x)+O(h^2)$$
$$\frac{y'(x_n+h)-y'(x_n-h)}{2h} = y''(x)+O(h^2), \quad h\to 0.$$

(ii) Wie kann man aus (i) das Mehrschrittverfahren

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1} = \frac{h}{2}(f_{n+1}-f_{n-1}), \quad n\geq 1,$$

erhalten. Untersuchen Sie dessen Konsistenzordnung.

(iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzengleichung

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=0, \quad n\geq 1,$$

für $y_0=0$ und $y_1=1$. Konvergiert das entsprechende Mehrschrittverfahren?